

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2021-2022 учебный год. Камчатский край

возрастная группа 10 класс

Максимальное количество баллов 35

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания. Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Условия задач

10.1. Найдите все возможные функции вида $f(x) = kx - b$, где $k \neq 0$, такие, что $f(f(x)) = 2f(x) - 3f(1 - x)$, или докажите, что их не существует. (7 баллов)

10.2. Докажите неравенство $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \geq 9$, если сумма положительных чисел x и y равна 1. (7 баллов)

10.3. На столе лежит 2021 конфета. Три толстяка по очереди съедают либо одну, либо две, либо четыре конфеты до того момента, пока конфеты не кончатся. Могут ли второй и третий толстяки сговориться так, чтобы не дать первому толстяку съесть последнюю конфету? (7 баллов)

10.4. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC отмечены точки D и F соответственно так, что прямые DC и BF – перпендикулярны между собой и пересекаются в точке E внутри треугольника ABC . Оказалось, что $AD = DC$ и $DE \cdot EC = FE \cdot EB$. Какую градусную меру может иметь угол BAC ? (7 баллов)

10.5. На поле для игры в морской бой размером 8×8 разместили фигуру «пятачок». Какое наименьшее количество выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка ранить одного «пятачка»? (7 баллов)

