

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2021-2022 уч.год
10 класс

1. Имеется 20 яблок, каждые два яблока отличаются по весу не более, чем на 40 грамм. Докажите, что эти яблоки можно разделить на две кучки по 10 яблок так, чтобы эти кучки отличались по весу не более, чем на 40 грамм.
2. Докажите, что при всех вещественных a, b, c, d выполняется неравенство

$$(ab + 1)^2 + (cd + 1)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1$$

3. Две равные окружности S_1 и S_2 касаются изнутри окружности S в точках K и M . Точка P – произвольная точка окружности S . Точки Q и R – точки пересечения KP и MP с окружностями S_1 и S_2 соответственно. Докажите, что прямые KM и QR параллельны.
4. Как известно, из пяти различных чисел можно получить десять различных групп по три числа. Существуют ли пять таких различных натуральных чисел, что их суммы по три числа являются десятью последовательными числами?
5. Даны две функции (*все переменные и коэффициенты – вещественные*)

$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad g(x) = x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Известно, что равенство $f(x) = g(x)$ не выполняется ни при каких значениях x . Докажите, что равенство $f(x + 1) = g(x - 1)$ выполняется хотя бы при одном значении переменной x .

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.

Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.