

Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год
11-ый класс

1. В таблицу 3×3 расставили числа от 1 до 9 (каждое по одному разу), а потом посчитали 6 произведений чисел в строках и столбцах. Могло ли оказаться, что три из них совпадают?
2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+20} + \sqrt{x+21}} + \frac{1}{\sqrt{x+21} + \sqrt{x+22}} = 1.$$

3. Докажите, что $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 2021! \cdot 2022!$ не является степенью натурального числа выше первой. (Напоминание: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)
4. Обозначим $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. Докажите, что при всех положительных x верно неравенство

$$P_{20}(x) \cdot P_{21}(x^2) \leq P_{20}(x^2) \cdot P_{22}(x).$$

5. В $\triangle ABC$ провели биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 , пересекающиеся в точке O . Оказалось, что площади $\triangle OB_1A$ и $\triangle OA_1C$ равны, а также равны площади $\triangle OB_1C$ и $\triangle OC_1A$. Верно ли, что $\triangle ABC$ равносторонний?

Максимальная оценка за каждую задачу 7 баллов