

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2021-2022 уч.год
11 класс

1. При каких значениях a уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x + a = 0$$

имеют хотя бы один общий корень?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH и биссектриса AP . Найдите углы этого треугольника, если известно, что вокруг четырехугольника $ABPH$ можно описать окружность, и $\angle CPH = 20^\circ$.
3. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – многочлены степени 2021. Известно, что при всех вещественных x выполняется $F(F(x)) = G(G(x))$ и существует такое вещественное число $k, k \neq 0$, что при всех вещественных x выполняется $F(kF(F(x))) = G(kG(G(x)))$. Найдите степень многочлена $F(x) - G(x)$.
4. Внутри треугольника отметили несколько точек. Точки соединили цветными отрезками так, что в каждой отмеченной точке сходится три отрезка, и каждая вершина треугольника соединена одним цветным отрезком с какой-то из отмеченных точек. Оказалось, что проведенные отрезки раскрашены в три цвета так, что в каждой отмеченной точке сходятся три отрезка разного цвета. Докажите, что отрезки, проведенные в вершины треугольника, окрашены в разные цвета.
5. Пусть S – набор из n различных вещественных положительных чисел ($n \geq 3$). Докажите, что максимально возможное число различных натуральных степеней числа 3, которые могут быть представлены как сумма трех различных элементов S , равно $n - 2$.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.

Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.