

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
*Муниципальный этап*  
2021-2022 уч.год  
8 класс

1. Существуют ли четыре различных натуральных числа  $a, b, c, d$  таких, что числа  $a^2 + 2cd + b^2$  и  $c^2 + 2ab + d^2$  являются квадратами натуральных чисел?
2. Имеется десятизначное число, для записи которого использованы все десять цифр, при этом ноль не стоит на первом месте. Цифры этого числа переписали в обратном порядке и полученную последовательность приписали справа к первоначальному числу. Докажите, что получившееся двадцатизначное число делится на 99.
3. Дана окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$ . На окружности отметили две точки  $A$  и  $B$  так, что  $\angle AOB = 20^\circ$ . Докажите, что  $AB > \frac{1}{3}R$ .
4. Однажды команда Рыцарей и команда Лжецов встретились в парке и решили покататься на круговой карусели, вмещающей 40 человек (*Карусель "Цепочка", на которой все сидят друг за другом*). Когда они расселись, каждый увидел двоих, одного впереди себя, другого за собой, и сказал: "Хотя бы один из сидящих впереди меня или сзади меня принадлежит к моей команде". Одно место оказалось свободным, и они позвали еще одного Лжеца. Этот Лжец сказал: "Вместе со мной мы можем расположиться на карусели так, чтобы это правило снова было выполнено". Из скольких человек состояла команда Рыцарей? (*Рыцарь всегда говорит правду, Лжец всегда говорит неправду.*)
5. Имеется 12 положительных вещественных чисел. Известно, что отношение любых двух чисел из этого набора не превосходит числа 2. Докажите, что их можно разбить на шесть пар так, что если вычислить суммы чисел в каждой паре, то отношение любых двух из полученных шести сумм не будет превосходить  $\frac{3}{2}$ .

*Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.*

*Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.*

*Не забудьте обосновать свои решения задач!*