

Муниципальный этап  
Всероссийской олимпиады школьников по математике  
2021-2022 учебный год

9-ый класс

1. В таблицу  $3 \times 3$  расставили неповторяющиеся натуральные числа, не большие 20. Затем перемножили числа в каждой строке и в каждом столбце. Могло ли оказаться, что все 6 произведений – полные квадраты?
2. Найдите все натуральные числа, которые при сложении с суммой своих цифр дают 2021.
3. Докажите, что при всех положительных  $x$  верно неравенство

$$(1 + x + x^2) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \leq (1 + x + x^2 + x^3)^2.$$

4. В  $\triangle ABC$  провели биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Оказалось, что площади  $\triangle OC_1B$  и  $\triangle OB_1C$  совпадают. Верно ли, что  $\triangle ABC$  равнобедренный?
5. Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют равенствам

$$xy + yz + zx = xyz, \quad x + y + z = 1.$$

Какие значения может принимать сумма  $x^3 + y^3 + z^3$ ?

Максимальная оценка за каждую задачу 7 баллов