

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2021-2022 учебный год. Камчатский край

возрастная группа 9 класс

Максимальное количество баллов 35

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания. Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Условия задач

9.1. Существуют ли такие целые числа x , y и z , для которых выполняется равенство:

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 2021? \text{ (7 баллов)}$$

9.2. У Ильи есть табличка, заполненная числами от 1 до 9 так, как в таблице слева.

За один ход Илья может поменять местами любые две строчки или любые два столбца.

Может ли он за несколько ходов получить таблицу справа? (7 баллов)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

9.3. Для положительных чисел x , y и z докажите неравенство

$$(1+x+2x^2)(2+3y+y^2)(4-11z+8z^2) \geq 7xyz. \text{ (7 баллов)}$$

9.4. В левом нижнем углу шахматной доски стоит шашка. Её можно передвигать на одну клетку вверх, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку по диагонали вниз-влево. Можно ли, двигая шашку таким образом, обойти все клетки доски, побывав на каждой из них один раз? (7 баллов)

9.5. Точка D вне остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle ABC + \angle ABD = \angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке AD . (7 баллов)