

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2021-2022 уч.год
9 класс

1. Ольга проехала из города на дачу на такси с пересадкой в поселке. Из города до поселка она ехала на "Такси-А", и заплатила за поездку из расчета 6 руб за км. Из поселка до дачи она ехала на "Такси-Б" и заплатила за поездку из расчета 4 руб за км. На следующий день Ольга ехала обратно, и обе фирмы такси поменяли тариф – "Такси-А" за поездку от поселка до города взяло по 3 руб за км, "Такси-Б" взяло за поездку от дачи до поселка по 10 руб за км. Ольга насчитала, что на второй день она заплатила ровно на 100 руб меньше. Могло ли так быть? Оплата поездок в такси производилась за целое число километров, время на посадку и высадку Ольга не оплачивала.
2. Докажите неравенство для любых вещественных a, b

$$a^2 + 4b^2 + 4b - 4a + 5 \geq 0$$

При каких a, b выполняется равенство?

3. На окружности отметили 2021 точку и соединили эти точки отрезками так, что получился выпуклый вписанный 2021-угольник, разрезанный диагоналями на треугольники. При этом никакие две диагонали не пересеклись во внутренних точках (*общими точками различных диагоналей являются только вершины*). Докажите, что среди полученных треугольников не может быть больше одного остроугольного.
4. Дана равнобедренная трапеция. Проведены две окружности: первая окружность касается боковых сторон в вершинах одного основания трапеции, вторая окружность касается боковых сторон в вершинах другого основания трапеции. Диагональ трапеции пересекается с каждой из окружностей, соответственно, получают две хорды. Докажите, что эти хорды равны.
5. Уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, где p, q, r – целые, имеет три различных целых корня x_1, x_2, x_3 . Докажите, что числа q и r не имеют общих делителей тогда и только тогда, когда числа в каждой из пар $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)$ не имеют общих делителей.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.

Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.