

9 класс

1. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно 5 из них действующие. За одну попытку разрешается нажать одновременно три любые кнопки. Если среди них есть хотя бы одна действующая – лампочка загорается. Как при помощи не более 9 попыток выяснить, является ли кнопка с номером 1 действующей? (При отпускании нажатых кнопок по завершении каждой попытки лампочка всегда гаснет).

2. Найдите значение дроби

$$\frac{2 \cdot 2020}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2020}}.$$

3. Жилище крота представляет собой линию из 100 куч (выходов на поверхность), соседние кучи соединены подземными переходами (1–2–3–...–99–100). Лиса хочет поймать крота. В начальный момент времени крот находится у некоторого выхода. Каждую минуту крот перемещается к одной из соседних куч, а лиса подходит к любой произвольной куче (не обязательно к другой). Если крот и лиса оказываются около одной кучи, то лиса ловит крота. В остальных случаях лиса не может наблюдать его положение и перемещения. Есть ли у лисы стратегия, позволяющая гарантированно поймать крота?

4. В окружности расположен квадрат $OMKN$ так, что вершина O совпадает с центром окружности, вершина K лежит на окружности. Хорда AB окружности проходит через вершину M , хорда CD – через вершину N . Докажите, что $AM \cdot MB = CN \cdot ND$.

5. Все натуральные числа раскрасили в два цвета. Докажите, что среди них можно так выбрать числа A , B и C одного цвета, что $A : C = C : B$.