

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2021 – 2022 учебном году  
9 класс

Время выполнения заданий – 4 часа

**9.1.** Фёдор задумал натуральное число, нацело делящееся на 300, и выписал все его натуральные делители, кроме самого числа. Докажите, что сумма нечётных чисел, выписанных Фёдором, меньше суммы чётных.

**9.2.** В треугольнике  $ABC$  провели медиану  $BM$ . Оказалось, что  $\angle ABM = 40^\circ$ ,  $\angle MBC = 70^\circ$ . Найдите отношение  $AB : BM$ . Ответ обоснуйте.

**9.3.** Числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенству:

$$\sqrt{xy} + \sqrt{(1-x)(1-y)} = \sqrt{7x(1-y)} + \frac{\sqrt{y(1-x)}}{\sqrt{7}}.$$

Найдите наибольшее значение выражения  $x + 7y$ . Ответ обоснуйте.

**9.4.** От фирмы «Рога и копыта» после ее банкротства осталось 17 рогов, 2 копыта и одна гиря. Все это богатство поделили между собой равными по весу частями Паниковский и Балаганов, причем гиря целиком досталась Балаганову. Рога и копыта на части тоже не пилили. Каждый рог тяжелее каждого копыта и легче гири на одну и ту же величину. Сколько рогов и копыт у Паниковского? Приведите все возможные варианты и докажете, что других нет.

**9.5.** На экзамене каждому из трёх студентов был предложен один и тот же тест из 40 вопросов. Назовем вопрос неподъёмным, если на него все ответили неверно; трудным, если только один студент ответил верно, лёгким, если ответили верно ровно два студента, и тривиальным, если верно ответили все трое. Известно, что лёгких вопросов вдвое больше, чем неподъёмных. Каково наибольшее число неподъёмных вопросов может содержать тест, если общее число верных ответов равно 64? Ответ обоснуйте.

**9.6. Задача Архимеда.** Пусть  $D$  – середина дуги  $AC$ ,  $B$  – некоторая точка этой дуги, отличная от  $D$ . Докажите, что точка  $E$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $D$  на ломаную  $ABC$ , делит длину этой ломаной пополам.