Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2022-2023
группа 1
Задания и решения

18 октября 2022 г.

10 класс

1. Вариант 1.

При перемножении двузначного и трёхзначного чисел получилось четырёхзначное число вида $A = \overline{abab}$. Найдите наибольшее A, если известно, что A делится на 14.

Ответ. 9898.

Решение.

Заметим, что $A = \overline{abab} = \overline{ab} \cdot 101$. Так как 101 и 14 взаимно просты, то $\overline{ab}$ делится на 14. Максимальное значение $\overline{ab} = 98$.

Вариант 2.

При перемножении двузначного и трёхзначного чисел получилось четырёхзначное число вида $A = \overline{abab}$. Найдите наибольшее A, если известно, что A делится на 16.

Ответ. 9696.

Вариант 3.

При перемножении двузначного и трёхзначного чисел получилось четырёхзначное число вида $A = \overline{abab}$. Найдите наибольшее A, если известно, что A делится на 47.

Ответ. 9494.

Вариант 4.

При перемножении двузначного и трёхзначного чисел получилось четырёхзначное число вида $A = \overline{abab}$. Найдите наибольшее A, если известно, что A делится на 23.

Ответ. 9292.

2. Вариант 1. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 1 больше цифры в разряде десятков (число не может начинаться с нуля).

Ответ. 810.

Решение. Старшую цифру числа можно выбрать 9 способами (любая, кроме нуля). Цифру в разряде сотен – 10 способами (подойдет любая цифра). Цифра в разряде десятков – любая от 0 до 8, а цифра в разряде единиц однозначно определяется выбранной цифрой в разряде десятков. Всего вариантов $9 \cdot 10 \cdot 9 = 810$.

Вариант 2.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 2 больше цифры в разряде сотен (число не может начинаться с нуля).

Ответ. 720.

Вариант 3.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде сотен ровно на 3 больше цифры в разряде единиц (число не может начинаться с нуля).

Ответ. 630.

Вариант 4.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 4 меньше цифры в разряде десятков (число не может начинаться с нуля).

Ответ. 540.

3. Вариант 1.

В семье Ивановых и мама, и папа, и трое их детей родились 1 апреля. Когда в семье родился первенец, родителям в сумме было 45 лет. Третий ребенок в семье появился год назад, когда сумма возрастов всех членов семьи составляла 70 лет. Сколько лет сейчас среднему ребёнку, если сумма возрастов детей составляет 14 лет?

Ответ. 5.

Решение.

Если первенец старше второго ребёнка на x лет, а средний старше третьего ребёнка на y лет, то $70 - 45 = 3(x + y) + y$, так как возраст каждого из родителей и старшего ребёнка к моменту рождения третьего ребёнка увеличился на $(x + y)$ лет, а возраст второго — на у лет. Аналогично $(x + y + 1) + (y + 1) + 1 = 14$. Мы получили систему уравнений $3x + 4y = 25, x + 2y = 11$, из которой находим $x = 3, y = 4$.

Вариант 2.

В семье Петровых и мама, и папа, и трое их детей родились 1 апреля. Когда в семье родился первенец, родителям в сумме было 49 лет. Третий ребенок в семье появился год назад, когда сумма возрастов всех членов семьи составляла 95 лет. Сколько лет сейчас среднему ребёнку, если сумма возрастов детей составляет 25 лет?

Ответ. 11.

Вариант 3.

В семье Сидоровых и мама, и папа, и трое их детей родились 1 апреля. Когда в семье родился первенец, родителям в сумме было 43 года. Третий ребенок в семье появился год назад, когда сумма возрастов всех членов семьи составляла 83 года. Сколько лет сейчас среднему ребёнку, если сумма возрастов детей составляет 21 год?

Ответ. 8.

Вариант 4.

В семье Барбоскиных и мама, и папа, и трое их детей родились 1 апреля. Когда в семье родился первенец, родителям в сумме было 47 лет. Третий ребенок в семье появился год назад, когда сумма возрастов всех членов семьи составляла 80 лет. Сколько лет сейчас среднему ребёнку, если сумма возрастов детей составляет 18 лет?

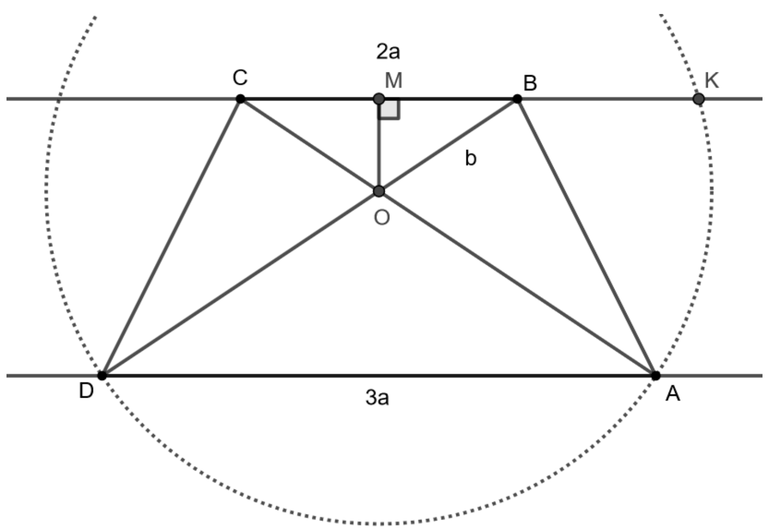
Ответ. 7.

4. Вариант 1.

Диагонали AC и BD равнобокой трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AD : BC = 3 : 2$. Окружность ω с центром O, проходящая через вершины A и D, пересекает продолжение основания BC за точку B в точке K. Оказалось, что $BK = BO$. Найдите отношение основания AD к радиусу окружности ω.

Ответ. $1/4$.

Решение.



Обозначим $BC = 2a$, $OB = b$, тогда $AD = 3a$, $OA = 3b/2$. Из точки O опустим перпендикуляр OM на прямую BC (из равнобедренности трапеции следует, что M – середина BC). Далее найдем двумя способами OM^2. Из треугольника OBM по теореме Пифагора $OM^2 = OB^2 - BM^2 = b^2 - a^2$. Из треугольника OKM по теореме Пифагора $OM^2 = OK^2 - KM^2 = \frac{9b^2}{4} - (b+a)^2$. Приравнивая правые части, имеем: $b^2 - a^2 = \frac{9b^2}{4} - (b+a)^2$, $b^2 = 8ab$. $\frac{AD}{AO} = \frac{2a}{b} = \frac{1}{4}$.

Вариант 2.

Диагонали AC и BD равнобокой трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AD : BC = 5 : 3$. Окружность ω с центром O, проходящая через вершины A и D, пересекает продолжение основания BC за точку B в точке K. Оказалось, что $BK = BO$. Найдите отношение основания AD к радиусу окружности ω.

Ответ. $7/9$.

Вариант 3.

Диагонали AC и BD равнобокой трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AD : BC = 7 : 4$. Окружность ω с центром O, проходящая через вершины A и D, пересекает продолжение основания BC за точку B в точке K. Оказалось, что $BK = BO$. Найдите отношение основания AD к радиусу окружности ω.

Ответ. $17/16$.

Вариант 4.

Диагонали AC и BD равнобокой трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AD : BC = 8 : 5$. Окружность ω с центром O, проходящая через вершины A и D, пересекает продолжение основания BC за точку B в точке K. Оказалось, что $BK = BO$. Найдите отношение основания AD к радиусу окружности ω.

Ответ. $14/25$.

5. Вариант 1.

В районе три посёлка А, Б и В связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовём *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки А и Б связывают 34 пути, посёлки Б и В – 29 путей. Какое наименьшее число путей может связывать посёлки А и В?

Ответ. 26.

Решение.

Пусть между городами А и Б проходит k дорог, между городами Б и В – m дорог, между городами А и В – n дорог. Тогда количество путей из А в Б равно $k + mn$, а количество путей из Б в В равно $m + kn$. Мы получили систему уравнений $k + mn = 34, m + kn = 29$, в которой неизвестные – натуральные числа, большие 1. Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $(m - k)(n - 1) = 5$. Нам осталось перебрать все делители 5: 1 и 5. Значит, $n = 2$ или $n = 6$. Для каждого n мы находи м k и m, решая исходную систему линейных уравнений. Если $n = 2$, то $k = 8$ и $m = 13$. Если $n = 6$, то $k = 4$ и $m = 5$. Количество путей, связывающих города А и В, равно $n + km$. В первом случае $n + km = 2 + 8 \cdot 13 = 106$, а во втором – $n + km = 6 + 4 \cdot 5 = 26$. Значит, искомый ответ равен 26.

Вариант 2.

В районе три посёлка А, Б и В связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовём *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки А и Б связывают 55 пути, посёлки Б и В – 50 путей. Какое наименьшее число путей может связывать посёлки А и В?

Ответ. 62.

Вариант 3.

В районе три посёлка А, Б и В связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовём *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки А и Б связывают 64 пути, посёлки Б и В – 53 пути. Какое наименьшее число путей может связывать посёлки А и В?

Ответ. 32.

Вариант 4.

В районе три посёлка А, Б и В связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовём *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки А и Б связывают 74 пути, посёлки Б и В – 61 путь. Какое наименьшее число путей может связывать посёлки А и В?

Ответ. 34.

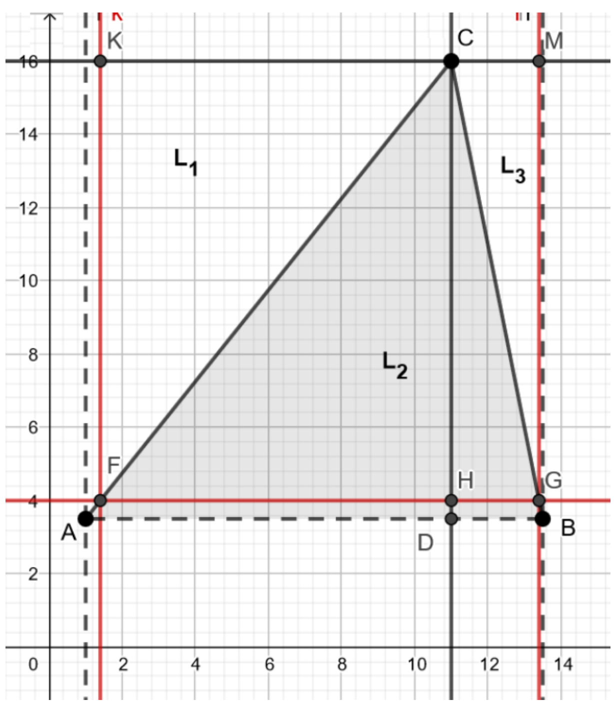
6. Вариант 1.

Вершины треугольника имеют координаты $A(1;3.5)$, $B(13.5;3.5)$, $C(11;16)$. Рассматриваются горизонтальные линии, задаваемые уравнениями $y=n$, где n – целое. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых на этих прямых сторонами треугольника.

Ответ. 78.

Решение.

Проведём прямую $y=4$, и пусть она пересечёт треугольник ABC в точках F и G. Построим прямоугольник $FKMG$ так, что KM проходит через точку C параллельно оси Ox. Обозначим L_1, L_2, L_3 – суммы длины отрезков, высекаемых прямыми $y=n$ соответственно в треугольниках FKC, FCG, CMG. В силу симметрии (равные треугольники $KFC = FCH$ и $CHG = CMG$), $L_1 + L_3 = L_2$. Найдём длину FG из подобия треугольников ABC и FCG. Так как $\frac{DC}{HC} = \frac{AB}{FG}$, то $FG = 12$, значит $L_2 = L_1 + L_3 = 12 \cdot 13/2 = 78$.



Вариант 2.

Вершины треугольника имеют координаты $A(1;3.5)$, $B(14.5;3.5)$, $C(11;17)$. Рассматриваются горизонтальные линии, задаваемые уравнениями $y=n$, где n – целое. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых на этих прямых сторонами треугольника.

Ответ. 91.

Вариант 3.

Вершины треугольника имеют координаты $A(1;3.5)$, $B(15.5;3.5)$, $C(11;18)$. Рассматриваются горизонтальные линии, задаваемые уравнениями $y=n$, где n – целое. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых на этих прямых сторонами треугольника.

Ответ. 105.

Вариант 4.

Вершины треугольника имеют координаты $A(1;3.5)$, $B(16.5;3.5)$, $C(11;19)$. Рассматриваются горизонтальные линии, задаваемые уравнениями $y=n$, где n – целое. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых на этих прямых сторонами треугольника.

Ответ. 120.

7. Вариант 1.

Числа x и y удовлетворяют равенству $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{2(x-y)}=1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{5x+y}{x-2y}$, в ответ запишите их сумму.

Ответ. 21.

Решение.

Приведя к общему знаменателю и приведя подобные слагаемые, получим равенство $3y^2=xy$. Если $y=0$, то x – любое ненулевое число. В этом случае значение выражения равно 5. Если $x=3y\neq 0$, то в этом случае значение выражения равно 16. Итоговый ответ $5+16=21$.

Вариант 2.

Числа x и y удовлетворяют равенству $\frac{x}{x+y}+\frac{2y}{(x-y)}=1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{7x+y}{x+2y}$, в ответ запишите их сумму.

Ответ. 27.

Вариант 3.

Числа x и y удовлетворяют равенству $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{2(x-y)}=1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{6x-7y}{2x-5y}$, в ответ запишите их сумму.

Ответ. 14.

Вариант 4.

Числа x и y удовлетворяют равенству $\frac{x}{x+y}+\frac{2y}{(x-y)}=1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{8x+3y}{2x+5y}$, в ответ запишите их сумму.

Ответ. 25.

8. Вариант 1.

Рассматривается квадратный трехчлен $P(x)=ax^2+bx+c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также умноженные на 4 корни трехчлена $Q(x)=cx^2+bx+a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных чисел?

Ответ. 9.

Решение.

Пусть у трёхчлена $P(x)$ корни $x_1, x_2 > 0$. Тогда по теореме Виета у трехчлена $Q(x)$ корнями будут числа $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$.

Сумма чисел, выписанных на доску, есть $S = x_1 + x_2 + \frac{4}{x_1} + \frac{4}{x_2}$. Для положительного k верно неравенство $k + \frac{4}{k} \geq 4$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $k = 2$.

Поэтому $S \geq 8$. Но $S = 8$, только если $x_1 = x_2 = 1$. Но по условию x_1, x_2 различные. Поэтому $S > 8$. Значит, наименьшее возможное целое значение S равно 9. Такая ситуация возможна. Пусть $x_1 = 1$, а x_2 – такое число, что $x_2 + \frac{4}{x_2} = 5$. Тогда трёхчлен с корнями x_1, x_2 – искомый.

Вариант 2.

Рассматривается квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также корни трехчлена $Q(x) = cx^2 + bx + a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных чисел?

Ответ. 5.

Вариант 3.

Рассматривается квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также умноженные на 9 корни трехчлена $Q(x) = cx^2 + bx + a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных чисел?

Ответ. 13.

Вариант 4.

Рассматривается квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также умноженные на 16 корни трехчлена $Q(x) = cx^2 + bx + a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных чисел?

Ответ. 17.