9 класс

Задача 9.1. В магазине продаётся 20 товаров, стоимости которых — различные натуральные числа от 1 до 20 рублей. Магазин решил устроить акцию: при покупке любых 5 товаров один из них выдаётся в подарок, причём покупатель сам выбирает, какой товар получит бесплатно. Влад хочет купить все 20 товаров в этом магазине, заплатив как можно меньше. Сколько рублей ему понадобится? (Каждый из 20 товаров продаётся в 1 экземпляре.)

Ответ: 136.

Решение. Влад может воспользоваться акцией не более 4 раз, поэтому он бесплатно приобретёт не более 4 товаров. Суммарная стоимость этих 4 товаров не превосходит $17+18+19+20$ рублей. Значит, рублей Владу надо не менее

$$(1+2+3+\ldots+20)-(17+18+19+20)=1+2+3+\ldots+16=\frac{16\cdot 17}{2}=136.$$

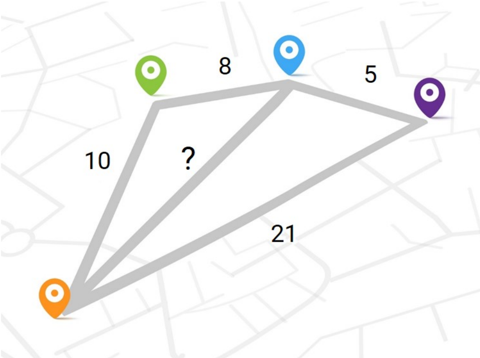
Покажем, что 136 рублей ему точно хватит. Он может совершать покупки товаров со следующими стоимостями: $(1,2,3,4,17)$, $(5,6,7,8,18)$, $(9,10,11,12,19)$, $(13,14,15,16,20)$. Если Влад в каждой покупке будет брать последний товар бесплатно, то потратит в точности 136 рублей.

Задача 9.2. Ваня загадал два натуральных числа, произведение которых равняется 7200. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих чисел?

Ответ: 60.

Решение. Поскольку каждое из этих чисел делится на их НОД, то их произведение делится на квадрат этого НОД. Наибольший точный квадрат, на который делится число $7200=2^5\cdot 3^2\cdot 5^2$ — это $3600=(2^2\cdot 3\cdot 5)^2$, поэтому НОД двух искомых чисел не превосходит 60. При этом НОД может равняться 60, если искомые два числа — это 60 и 120. $\square$

Задача 9.3. Четыре города и пять дорог расположены так, как изображено на рисунке. Длины всех дорог равны целому числу километров. Длины четырёх дорог указаны на рисунке. Сколько километров составляет длина оставшейся?



Ответ: 17.

Решение. Будем пользоваться неравенством треугольника: в любом невырожденном треугольнике сумма любых двух сторон строго больше оставшейся.

Пусть x км — неизвестная длина. Из левого треугольника видим, что $x < 10 + 8 = 18$. Но если $x \leqslant 16$, то в правом треугольнике неравенство треугольника не выполняется: $x + 5 \leqslant 21$. Поскольку x — целое число, меньшее 18 и большее 16, то оно равно 17. □

Задача 9.4. Простое число p таково, что число $p+25$ является седьмой степенью простого числа. Чему может быть равно p? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 103.

Решение. Воспользуемся тем, что единственное простое чётное число — это 2.

- Пусть $p = 2$, тогда $p + 25 = 27$, что не является седьмой степенью. Противоречие.
- Пусть $p > 2$, тогда p нечётно, а $p + 25$ чётно. Поскольку $p + 25$ чётно и является седьмой степенью простого числа, то это простое число равно 2. Следовательно, $p + 25 = 2^7 = 128$, откуда получаем $p = 103$. □

Задача 9.5. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 80 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 80 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из двух фраз:

- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки больше моего».
- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки меньше моего».

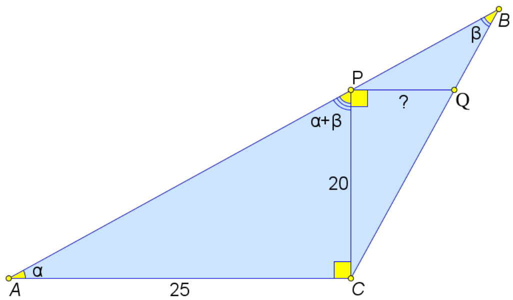
Какое наименьшее количество рыцарей могло быть среди этих 80 жителей?

Ответ: 70.

Решение. Предположим, что лжецов хотя бы 11. Упорядочим по возрастанию номера на их футболках и выберем лжеца с 6-м по счёту номером. Тогда он обязан сказать правду, ведь есть хотя бы 5 лжецов как с меньшим номером, так и с бо́льшим. Таким образом, лжецов не более 10, т. е. рыцарей не менее 70.

Покажем, что рыцарей могло быть ровно 70. Пусть, например, рыцари были в футболках с номерами 1—70, а лжецы — в футболках с номерами 71—80. Все рыцари и лжецы с номерами 76—80 сказали первую фразу, а лжецы с номерами 71—75 сказали вторую фразу. Ясно, что все условия задачи выполняются. □

Задача 9.6. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом C. На его сторонах AB и BC отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle ACP = CPQ = 90°$. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $AC = 25$, $CP = 20$, $\angle APC = \angle A + \angle B$.



Ответ: 16.

Решение. Поскольку $\angle PCB + \angle PBC = \angle APC = \angle PAC + \angle PBC$, получаем $\angle PCB = \angle PAC$.

Заметим, что прямоугольные треугольники PAC и QCP подобны по острому углу, и

$$\frac{25}{20} = \frac{AC}{CP} = \frac{PC}{PQ} = \frac{20}{PQ},$$

откуда находим $PQ = \frac{20 \cdot 20}{25} = 16$. □

Задача 9.7. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, старший коэффициент которого равен 1. На графике $y = P(x)$ отметили две точки с абсциссами 10 и 30. Оказалось, что биссектриса первой четверти координатной плоскости пересекает отрезок между ними в его середине. Найдите $P(20)$.

Ответ: −80.

Решение. Середина этого отрезка имеет координаты $\left(\frac{10+30}{2}, \frac{P(10)+P(30)}{2}\right)$. Поскольку она лежит на биссектрисе первой четверти, т.е. на прямой $y = x$, эти координаты равны. Отсюда получаем $P(10) + P(30) = 40$.

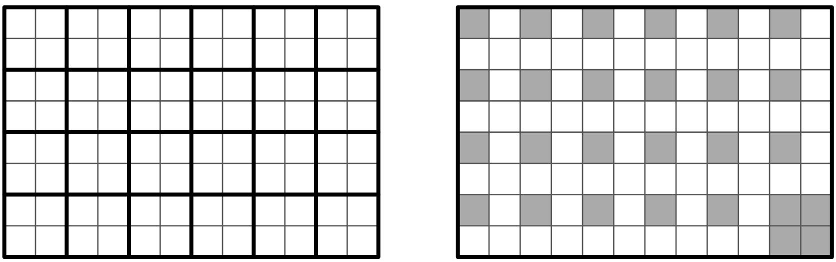
Так как $P(x)$ приведённый, его можно записать в виде $P(x) = x^2 + ax + b$. Тогда условие $P(10)+P(30) = 40$ переписывается в виде $100+10a+b+900+30a+b = 40$, откуда следует, что $40a + 2b = -960$ и $20a + b = -480$.

Следовательно, $P(20) = 400 + 20a + b = 400 - 480 = -80$. □

Задача 9.8. В таблице 8×12 некоторые N клеток — чёрные, а остальные — белые. За одну операцию разрешается покрасить три клетки, образующие трёхклеточный уголок, в белый цвет (некоторые из них ещё до перекрашивания могли быть белыми). Оказалось, что таблицу невозможно сделать полностью белой менее чем за 25 таких операций. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 27.

Решение. Разобьём таблицу 8×12 на 24 квадрата 2×2 (рис. 9a).



(a) (b)

Рис. 9: к решению задачи 9.8

Сначала покажем, как можно покрасить в чёрный цвет 27 клеток требуемым образом. В каждом квадрате 2×2 покрасим верхнюю левую клетку, а в правом нижнем квадрате также закрасим все остальные клетки (рис. 9b). Заметим, что никакой трёхклеточный уголок не может одновременно накрыть чёрные клетки из двух разных квадратов 2×2. Поэтому потребуется не менее 2 операций для правого нижнего квадрата, и ещё 23 операции для оставшихся квадратов, т. е. суммарно не менее 25 операций.

Теперь покажем, что если чёрных клеток 26, то таблицу можно гарантированно сделать полностью белой не более чем за 24 операции (если изначально чёрных клеток меньше 26, то некоторые белые можно считать чёрными). Для этого нам достаточно либо один раз перекрасить 3 чёрные клетки в белый цвет, либо дважды перекрасить 2 чёрные клетки в белый цвет. Действительно, после таких действий количество доступных операций будет не меньше оставшегося количества чёрных клеток, поэтому дальше достаточно будет каждый раз перекрашивать хотя бы по одной чёрной клетке.

Поскольку чёрных клеток всего 26, а квадратов 2×2 всего 24, то как раз либо в каком-то квадрате есть 3 чёрные клетки, либо хотя бы в двух квадратах есть по 2 чёрные клетки (иначе чёрных клеток не больше $24 + 1 = 25$). Перекрасив соответствующие трёхклеточные уголки, а затем перекрашивая хотя бы по одной чёрной клетке, добьёмся требуемого не более чем за 24 операции. $\square$