Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 10 класса, 2022–2023 учебный год

1. В комоде лежат 23 носка: 8 белых и 15 чёрных. Раз в минуту Марина подходит к комоду и вытаскивает из него носок. Если в какой-то момент Марина достаёт суммарно больше чёрных носков, чем белых, она восклицает: «Наконец-то!» — и заканчивает процесс.

Какое наибольшее число носков может достать Марина, прежде чем воскликнет: «Наконец-то!»? В ответе учитывается носок, который Марина достала последним.

Ответ. 17.

Решение. Если Марина достанет 17 носков, то среди них будет не больше 8 белых, а значит — хотя бы 9 чёрных. Поэтому в этот момент она точно воскликнет «Наконец-то!».

С другой стороны, если она достанет всего 16 носков, ей «может не повезти»: если она последовательно достаёт белый носок, чёрный носок, белый носок, чёрный носок, ... В этой ситуации после каждого чётного вытащенного носка чёрных и белых носков будет поровну, а после каждого нечётного — больше белых.

Комментарий. Другой пример, когда Марине «может не повезти»: если она вначале достанет 8 белых носков, а потом — 8 чёрных.

2. Слитки высокообогащённого урана необходимо помещать на хранение таким образом, чтобы расстояние до ближайшего слитка было как можно больше. Если подходящих мест несколько, выбирается любое из них. К сожалению, никто не знает, сколько слитков нужно будет хранить. Слитки прибывают по одному. После помещения на хранение слиток нельзя передвигать.

Пустой складской комплекс имеет 89 камер хранения, размещённых в один ряд. Первый прибывший слиток кладут в комнату 1, а второй, согласно рекомендациям, кладут в помещение 89.

В каком помещении может оказаться 6-й прибывший брусок? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 12, 34, 56 или 78.

Решение. В этой задаче достаточно прочитать условие и проделать описанные в условии действия.

Третий слиток поместят посередине между первым и вторым: т.е. в камеру $(1+89)/2 = 45$. Куда могут поместить четвёртый? Сейчас слитки лежат в 1-й, 45-й и 89-й камерах.

- Если слиток поместят между 1-й и 45-й камерами, то чтобы он был как можно дальше от ближайшего слитка его надо поместить ровно посередине — в камеру $(1+45)/2 = 23$; тогда до ближайшего слитка расстояние будет 22;

- Если слиток поместят между 45-й и 89-й камерами, то чтобы он был как можно дальше до ближайшего слитка его надо поместить ровно посередине — в камеру $(45+89)/2 = 67$; тогда до ближайшего слитка расстояние будет 22.

Первый и второй случаи дают одинаковое расстояние до ближайшего слитка, поэтому четвёртый слиток может оказаться как в 23-й камере, так и в 67-й. Пятый же слиток поместят во вторую из этих двух камер.

Перед приездом шестого слитка слитки будут лежать в камерах 1, 23, 45, 67 и 89. Аналогично рассуждениям выше, шестой слиток может оказаться или в 12-й, или в 34-й, или в 56-й, или в 78-й камерах: от каждой из них расстояние до ближайшего слитка равно 11.

3. Натуральное число n таково, что $n+2$ делится на 3, а $n+3$ делится на 4. Какие из следующих утверждений гарантированно верны, т.е. выполняются для всех n, подходящих под условие?
a) $n+4$ делится на 5;
b) $n+5$ делится на 6;
c) $n+6$ делится на 7;
d) $n+7$ делится на 8.

Ответ. Только b).

Решение. Для начала заметим, что b) подходит: $n+5 = (n+2)+3$ — делится на 3, $n+5 = (n+3)+2$ — делится на 2. Поскольку число делится на 2 и на 3, то оно делится и на 6.

Теперь докажем, что каждый из остальных вариантов не подходит. Для этого в каждом случае нужно привести пример n, подходящего под условие, но для которого утверждение не выполняется. У нас это будет один и тот же пример, $n = 13$, для него условие выполняется: $n+2 = 15$ делится на 3, $n+3 = 16$ делится на 4, но

a) $n + 4 = 17$ не делится на 5;

c) $n + 6 = 19$ не делится на 7;

d) $n + 7 = 20$ не делится на 8.

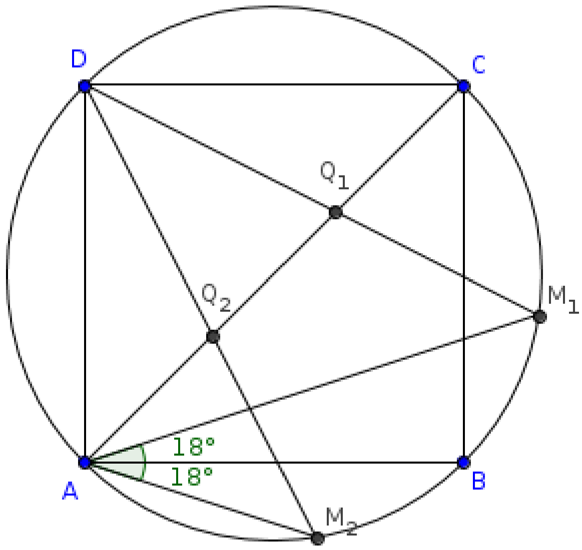
Замечание. Вторую часть можно было решить по другому. При $n = 1$ выполняются все утверждения. Если мы увеличим n на 12 (что и было сделано в примере), то каждое из чисел $n+2$, $n+3$, $\ldots$, $n+7$ увеличится на 12. При увеличении на 12 делимости на 3 и 4 сохранятся, а вот на 5, 7 и 8 — нет.

4. На описанной окружности квадрата $ABCD$ отмечена точка M такая, что $\angle MAB = 18°$. Отрезок MD пересекает диагональ AC в точке Q.

Какие значения может принимать величина угла $\angle AQD$? Ответ выразите в градусах. Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 72 или 108.

Решение. Первое, о чём надо не забыть в этой задаче — что для точки M существуют два положения: в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и квадрат (точка M_1 на чертеже), и в другой (точка M_2 на чертеже).



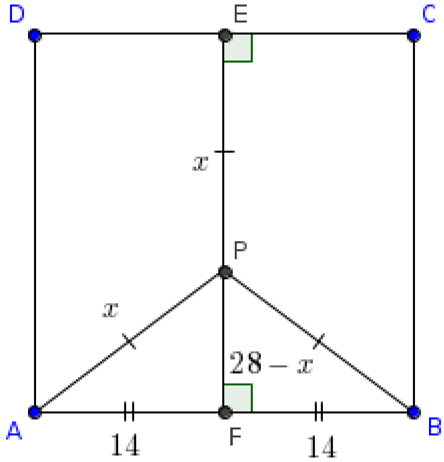
По теореме о внешнем угле треугольника для треугольника CQ_1D, $\angle AQ_1D = \angle ACD + \angle M_1DC = 45° + \angle M_1DC$. Заметим, что $\angle M_1DC = \angle BDC - \angle BDM_1 = 45° - \angle BAM_1 = 27°$: углы $\angle BDM_1$ и BAM_1 равны, так как опираются на одну дугу BM_1. Получаем, $\angle AQ_1D = 45° + 27° = 72°$.

Аналогично, $\angle AQ_2D = \angle ACD + \angle M_2DC = 45° + (\angle M_2DB + \angle BDC) = 90° + \angle M_2AB = 108°$.

5. Сторона квадрата $ABCD$ равна 28. На стороне CD отмечена точка E, а внутри квадрата — точка P так, что $PE \perp CD$, а $AP = PB = PE$. Найдите длину отрезка AP. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

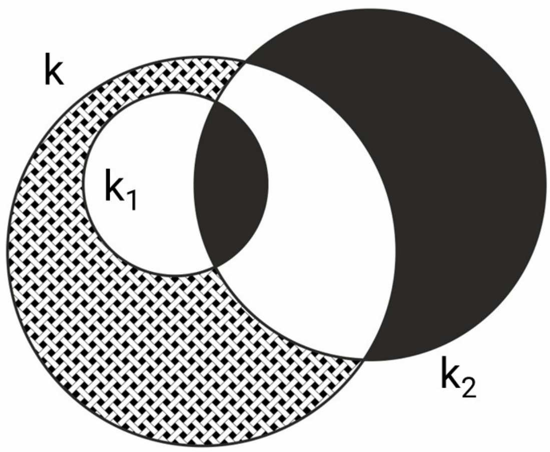
Ответ. $35/2 = 17{,}5$.

Решение. Обозначим $AP = PE = PB$ через x. Продлим отрезок PE до пересечения со стороной AB в точке F. Заметим, что $PF \perp AB$, так как $AB \parallel CD$. Значит, в равнобедренном треугольнике APB высота PF является ещё и медианой, откуда $AF = FB = AB/2 = 14$.



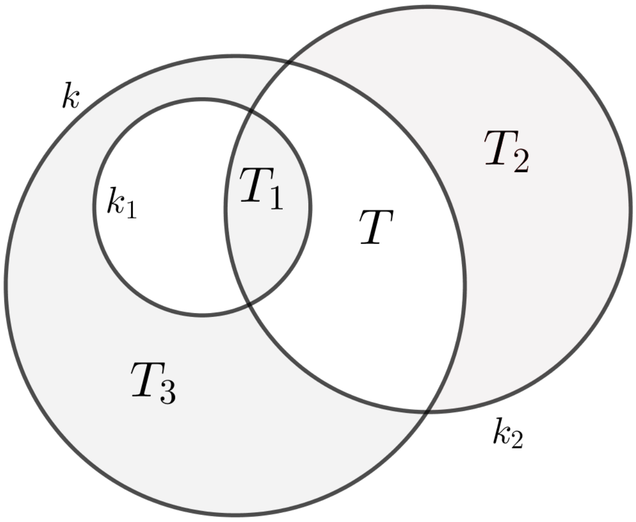
Кроме того, заметим, что $ADEF$ — прямоугольник, откуда $EF = AD = 28$, а тогда $PF = EF - EP = 28 - x$. Тогда по теореме Пифагора для треугольника APF получаем $x^2 = 14^2 + (28 - x)^2$, раскрывая скобки и решая получившееся линейное уравнение, получаем $x = 35/2 = 17{,}5$.

6. Окружность k_1 радиуса 8 см лежит внутри окружности k. Обе окружности пересекают окружность k_2 радиуса 15 см, как показано на рисунке. Чему равен радиус k, если заштрихованная площадь внутри k, но вне k_1, равна общей площади заштрихованных областей внутри k_2?



Ответ. 17.

Решение. Обозначим площадь внутри круга k_1, но вне круга k_2 через T_1; внутри круга k_2, но вне круга k через T_2; внутри круга k, но вне кругов k_1 и k_2 через T_3; внутри кругов k и k_2, но вне круга k_1 через T (см. рисунок ниже). Кроме того, обозначим радиус k через R.



По условию $T_3 = T_1 + T_2$. Запишем площади кругов k_2 и k: $T + T_1 + T_2 = 15^2\pi$, $8^2\pi + T + T_3 = R^2\pi$. Осталось заметить, что $T + T_3 = T + T_1 + T_2 = 15^2\pi$, откуда $R^2\pi = 8^2\pi + 15^2\pi$, $R^2 = 289$, $R = 17$.

Замечание. Можно было сразу заметить, что разность суммы площадей кругов k_1 и k_2 и площади круга k равняется разности чёрной и заштрихованной областей.

7. Строителям нужно выложить пол в небольшом домике маленькими квадратными плитками. Заказчик говорит, что предпочтительней вариант, в котором красных плиток больше. Для вариантов с одинаковым количеством красных плиток предпочтительней тот, в котором больше оранжевых; и вообще, предпочтения заказчика по цветам: красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, синий, индиго. Его жена же хочет совершенно наоборот:

- плиток цвета индиго должно быть хотя бы столько, сколько красных, оранжевых, жёлтых, зелёных и синих вместе взятых;
- плиток синего цвета — хотя бы столько, сколько красных, оранжевых, жёлтых и зелёных вместе взятых;
- плиток зелёного цвета — хотя бы столько, сколько красных, оранжевых и жёлтых вместе взятых;
- плиток жёлтого цвета — хотя бы столько, сколько красных и оранжевых вместе взятых;
- плиток оранжевого цвета — хотя бы столько, сколько красных.

На пол нужно 100 плиток.

Сколько плиток зелёного цвета потребуется, если взять наиболее предпочтительный для заказчика вариант, который также удовлетворяет условиям его жены?

Ответ. 13.

Решение. По условиям жены заказчика плиток цвета индиго должно быть хотя бы столько, сколько всех остальных, вместе взятых. Это означает, что что их должно быть хотя бы 50 — половина всех плиток. Заказчику же явно хочется, чтобы плиток цвета индиго было поменьше. Значит, в искомом варианте плиток цвета индиго будет ровно 50.

Теперь мы перешли к аналогичной задаче: без цвета индиго, а плиток нужно $100-50=50$. Аналогично рассуждая, получаем, что плиток синего цвета должно быть 25.

И вновь мы перешли к аналогичной задаче: теперь ещё и без синего цвета, а плиток нужно $50-25=25$. Тогда плиток зелёного цвета в искомом варианте будет 13.

Комментарий. Продолжая рассуждения, мы получим количества плиток остальных цветов.

8. Число a — корень уравнения $x^{11}+x^7+x^3=1$. Укажите все натуральные значения n, при которых выполняется равенство $a^4+a^3=a^n+1$.

Ответ. Только 15.

Решение. Так как a — корень уравнения $x^{11}+x^7+x^3=1$, то $a^{11}+a^7+a^3=1$.

Если вынести в левой части a^3 за скобки, то останется a^8+a^4+1 — это выражение s^2+s+1 при $s=a^4$, которое мы видели в формуле разности кубов $s^3-1=(s-1)(s^2+s+1)$. Домножим равенство на a^4-1, получим $a^3(a^{12}-1)=a^4-1$, откуда после преобразований получаем $a^{15}+1=a^3+a^4$.

Осталось заметить, что $a\neq\pm1$ и $a\neq0$, т.к. эти числа не являются корнями исходного уравнения. Значит, все степени a различны, поэтому ничего, кроме 15, не является ответом.

Замечание. Число a существует: значение $x^{11}+x^7+x^3$ при $x=0$ равно 0, т.е. меньше 1, а при $x=1$ равно 3, т.е. больше 1. По теореме о промежуточном значении где-то на отрезке $[0,1]$ она должна равняться 1.

Информация о других клонах

1. В комоде лежат 17 носков: 5 белых и 12 чёрных. Раз в минуту Марина подходит к комоду и вытаскивает из него носок. Если в какой-то момент Марина достаёт суммарно больше чёрных носков, чем белых, она восклицает: «Наконец-то!» — и заканчивает процесс.

Какое наибольшее число носков может достать Марина, прежде чем воскликнет: «Наконец-то!»? В ответе учитывается носок, который Марина достала последним.

Ответ. 11.

1. В комоде лежат 33 носка: 13 белых и 20 чёрных. Раз в минуту Марина подходит к комоду и вытаскивает из него носок. Если в какой-то момент Марина достаёт суммарно больше чёрных носков, чем белых, она восклицает: «Наконец-то!» — и заканчивает процесс.

Какое наибольшее число носков может достать Марина, прежде чем воскликнет: «Наконец-то!»? В ответе учитывается носок, который Марина достала последним.

Ответ. 27.

1. В комоде лежат 27 носков: 10 белых и 17 чёрных. Раз в минуту Марина подходит к комоду и вытаскивает из него носок. Если в какой-то момент Марина достаёт суммарно больше чёрных носков, чем белых, она восклицает: «Наконец-то!» — и заканчивает процесс.

Какое наибольшее число носков может достать Марина, прежде чем воскликнет: «Наконец-то!»? В ответе учитывается носок, который Марина достала последним.

Ответ. 21.

2. Слитки высокообогащённого урана необходимо помещать на хранение таким образом, чтобы расстояние до ближайшего слитка было как можно больше. Если подходящих мест несколько, выбирается любое из них. К сожалению, никто не знает, сколько слитков нужно будет хранить. Слитки прибывают по одному. После помещения на хранение слиток нельзя передвигать.

Пустой складской комплекс имеет 161 камеру хранения, размещённых в один ряд. Первый прибывший слиток кладут в комнату 1, а второй, согласно рекомендациям, кладут в помещение 161.

В каком помещении может оказаться 6-й прибывший брусок? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 21, 61, 101 или 141.

2. Слитки высокообогащённого урана необходимо помещать на хранение таким образом, чтобы расстояние до ближайшего слитка было как можно больше. Если подходящих мест несколько, выбирается любое из них. К сожалению, никто не знает, сколько слитков нужно будет хранить. Слитки прибывают по одному. После помещения на хранение слиток нельзя передвигать.

Пустой складской комплекс имеет 121 камеру хранения, размещённых в один ряд. Первый прибывший слиток кладут в комнату 1, а второй, согласно рекомендациям, кладут в помещение 121.

В каком помещении может оказаться 6-й прибывший брусок? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 12, 34, 56 или 78.

2. Слитки высокообогащённого урана необходимо помещать на хранение таким образом, чтобы расстояние до ближайшего слитка было как можно больше. Если подходящих мест несколько, выбирается любое из них. К сожалению, никто не знает, сколько слитков нужно будет хранить. Слитки прибывают по одному. После помещения на хранение слиток нельзя передвигать.

Пустой складской комплекс имеет 81 камеру хранения, размещённых в один ряд. Первый прибывший слиток кладут в комнату 1, а второй, согласно рекомендациям, кладут в помещение 81.

В каком помещении может оказаться 6-й прибывший брусок? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 11, 31, 51 или 71.

3. Натуральное число n таково, что $n+2$ делится на 2, а $n+3$ делится на 3. Какие из следующих утверждений гарантированно верны, т.е. выполняются для всех n, подходящих под условие?
а) $n+4$ делится на 4;

b) $n+5$ делится на 5;
c) $n+6$ делится на 6;
d) $n+7$ делится на 7.

Ответ. Только c).

3. Натуральное число n таково, что $n+1$ делится на 2, а $n+2$ делится на 3. Какие из следующих утверждений гарантированно верны, т.е. выполняются для всех n, подходящих под условие?
a) $n+3$ делится на 4;
b) $n+4$ делится на 5;
c) $n+5$ делится на 6;
d) $n+6$ делится на 7.

Ответ. Только c).

3. Натуральное число n таково, что $n+3$ делится на 3, а $n+4$ делится на 4. Какие из следующих утверждений гарантированно верны, т.е. выполняются для всех n, подходящих под условие?
a) $n+5$ делится на 5;
b) $n+6$ делится на 6;
c) $n+7$ делится на 7;
d) $n+8$ делится на 8.

Ответ. Только b).

4. На описанной окружности квадрата $ABCD$ отмечена точка M такая, что $\angle MAB = 21°$. Отрезок MD пересекает диагональ AC в точке Q.

Какие значения может принимать величина угла $\angle AQD$? Ответ выразите в градусах. Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 69 или 111.

4. На описанной окружности квадрата $ABCD$ отмечена точка M такая, что $\angle MAB = 23°$. Отрезок MD пересекает диагональ AC в точке Q.

Какие значения может принимать величина угла $\angle AQD$? Ответ выразите в градусах. Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 67 или 113.

4. На описанной окружности квадрата $ABCD$ отмечена точка M такая, что $\angle MAB = 24°$. Отрезок MD пересекает диагональ AC в точке Q.

Какие значения может принимать величина угла $\angle AQD$? Ответ выразите в градусах. Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 66 или 114.

5. Сторона квадрата $ABCD$ равна 20. На стороне CD отмечена точка E, а внутри квадрата — точка P так, что $PE \perp CD$, а $AP = PB = PE$. Найдите длину отрезка AP. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. $25/2 = 12{,}5$.

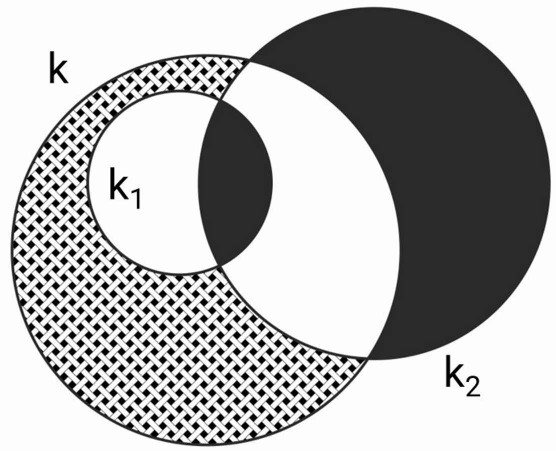
5. Сторона квадрата $ABCD$ равна 36. На стороне CD отмечена точка E, а внутри квадрата — точка P так, что $PE \perp CD$, а $AP = PB = PE$. Найдите длину отрезка AP. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. $45/2 = 22{,}5$.

5. Сторона квадрата $ABCD$ равна 12. На стороне CD отмечена точка E, а внутри квадрата — точка P так, что $PE \perp CD$, а $AP = PB = PE$. Найдите длину отрезка AP. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

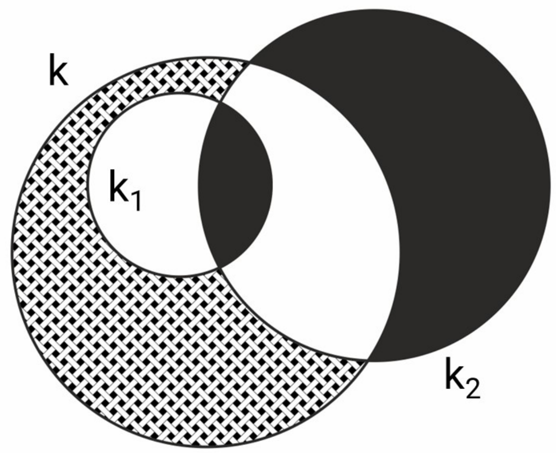
Ответ. $15/2 = 7{,}5$.

6. Окружность k_1 радиуса 5 см лежит внутри окружности k. Обе окружности пересекают окружность k_2 радиуса 12 см, как показано на рисунке. Чему равен радиус k, если заштрихованная площадь внутри k, но вне k_1, равна общей площади заштрихованных областей внутри k_2?



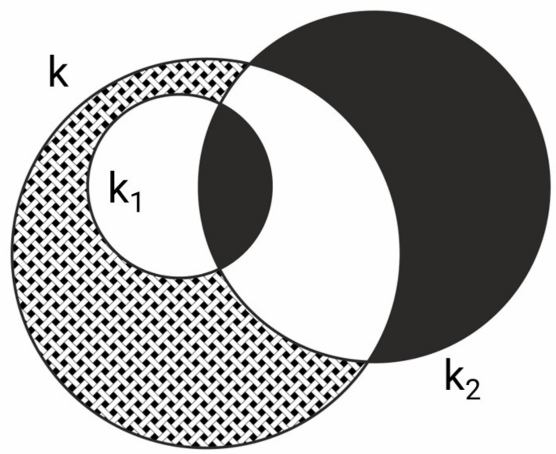
Ответ. 13.

6. Окружность k_1 радиуса 7 см лежит внутри окружности k. Обе окружности пересекают окружность k_2 радиуса 24 см, как показано на рисунке. Чему равен радиус k, если заштрихованная площадь внутри k, но вне k_1, равна общей площади заштрихованных областей внутри k_2?



Ответ. 25.

6. Окружность k_1 радиуса 12 см лежит внутри окружности k. Обе окружности пересекают окружность k_2 радиуса 35 см, как показано на рисунке. Чему равен радиус k, если заштрихованная площадь внутри k, но вне k_1, равна общей площади заштрихованных областей внутри k_2?



Ответ. 37.

7. Строителям нужно выложить пол в небольшом домике маленькими квадратными плитками. Заказчик говорит, что предпочтительней вариант, в котором красных плиток больше. Для вариантов с одинаковым количеством красных плиток предпочтительней тот, в котором больше оранжевых; и вообще, предпочтения заказчика по цветам: красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, синий, индиго. Его жена же хочет совершенно наоборот:

- плиток цвета индиго должно быть хотя бы столько, сколько красных, оранжевых, жёлтых, зелёных и синих вместе взятых;
- плиток синего цвета — хотя бы столько, сколько красных, оранжевых, жёлтых и зелёных вместе взятых;
- плиток зелёного цвета — хотя бы столько, сколько красных, оранжевых и жёлтых вместе взятых;
- плиток жёлтого цвета — хотя бы столько, сколько красных и оранжевых вместе взятых;
- плиток оранжевого цвета — хотя бы столько, сколько красных.

На пол нужно 90 плиток.

Сколько плиток синего цвета потребуется, если взять наиболее предпочтительный для заказчика вариант, который также удовлетворяет условиям его жены?

Ответ. 23.

7. Строителям нужно выложить пол в небольшом домике маленькими квадратными плитками. Заказчик говорит, что предпочтительней вариант, в котором красных плиток больше. Для вариантов с одинаковым количеством красных плиток предпочтительней тот, в котором больше оранжевых; и вообще, предпочтения заказчика по цветам: красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, синий, индиго. Его жена же хочет совершенно наоборот:

- плиток цвета индиго должно быть хотя бы столько, сколько красных, оранжевых, жёлтых, зелёных и синих вместе взятых;
- плиток синего цвета — хотя бы столько, сколько красных, оранжевых, жёлтых и зелёных вместе взятых;
- плиток зелёного цвета — хотя бы столько, сколько красных, оранжевых и жёлтых вместе взятых;
- плиток жёлтого цвета — хотя бы столько, сколько красных и оранжевых вместе взятых;
- плиток оранжевого цвета — хотя бы столько, сколько красных.

На пол нужно 110 плиток.

Сколько плиток жёлтого цвета потребуется, если взять наиболее предпочтительный для заказчика вариант, который также удовлетворяет условиям его жены?

Ответ. 7.

7. Строителям нужно выложить пол в небольшом домике маленькими квадратными плитками. Заказчик говорит, что предпочтительней вариант, в котором красных плиток больше. Для вариантов с одинаковым количеством красных плиток предпочтительней тот, в котором больше оранжевых; и вообще, предпочтения заказчика по цветам: красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, синий, индиго. Его жена же хочет совершенно наоборот:

- плиток цвета индиго должно быть хотя бы столько, сколько красных, оранжевых, жёлтых, зелёных и синих вместе взятых;
- плиток синего цвета — хотя бы столько, сколько красных, оранжевых, жёлтых и зелёных вместе взятых;
- плиток зелёного цвета — хотя бы столько, сколько красных, оранжевых и жёлтых вместе взятых;
- плиток жёлтого цвета — хотя бы столько, сколько красных и оранжевых вместе взятых;

- плиток оранжевого цвета — хотя бы столько, сколько красных.

На пол нужно 150 плиток.

Сколько плиток оранжевого цвета потребуется, если взять наиболее предпочтительный для заказчика вариант, который также удовлетворяет условиям его жены?

Ответ. 5.

8. Число a — корень уравнения $x^{13} + x^9 + x^5 = 1$. Укажите все натуральные значения n, при которых выполняется равенство $a^5 + a^4 = a^n + 1$.

Ответ. Только 17.

8. Число a — корень уравнения $x^{13} + x^8 + x^3 = 1$. Укажите все натуральные значения n, при которых выполняется равенство $a^5 + a^3 = a^n + 1$.

Ответ. Только 18.

8. Число a — корень уравнения $x^{11} + x^8 + x^5 = 1$. Укажите все натуральные значения n, при которых выполняется равенство $a^5 + a^3 = a^n + 1$.

Ответ. Только 14.

8. Число a — корень уравнения $x^{13} + x^{10} + x^7 = 1$. Укажите все натуральные значения n, при которых выполняется равенство $a^7 + a^3 = a^n + 1$.

Ответ. Только 16.