Школьный этап ВСОШ по математике, 2022-2023 учебный год, 10 класс.

1.1. *В лыжной гонке Петя и Вася стартовали одновременно. Вася всю гонку пробежал с постоянной скоростью 12 км/ч. Петя первую половину дистанции бежал со скоростью 9 км/ч и отстал от Васи. Какой должна быть скорость Пети на второй половине дистанции, чтобы ему удалось догнать Васю и прийти к финишу одновременно с товарищем? Ответ выразите в км/ч.*

Ответ: 18

Решение. Пусть t — время, за которое Петя пробежал половину дистанции, тогда длина половины дистанции $9t$, а всей дистанции — $18t$. Вася за время t пробежал $12t$, и ему осталось до финиша $6t$, на которые он потратит время $t/2$. Чтобы за время $t/2$ Пете пробежать половину дистанции и догнать Васю на финише, Петя должен бежать со скоростью $9t/\left(\dfrac{t}{2}\right) = 18$.

2.1. *На 40 клеток шахматной доски* 8×8 *положили по камню. Посчитали произведение количества камней, лежащих на белых клетках, и количества камней, лежащих на чёрных клетках. Найдите минимальное возможное значение этого произведения.*

Ответ: 256

Решение. Пусть b и $w = 40 - b$ — количества камней соответственно на чёрных и белых клетках. Не умаляя общности, считаем, что $b \geqslant w$, так что b может принимать любое целое значение от 20 до 32. Нас интересует минимальное значение произведения $b(40-b)$. Квадратичная функция $x(40-x) = -x^2 + 40x$ принимает наибольшее значение в точке $x_b = 20$ и убывает при $x \geqslant 20$. Поэтому ответом в задаче является значение $f(32) = 32 \cdot 8 = 256$.

3.1. *У Коли было 10 листов бумаги. На первом шаге он выбирает один лист и делит его на две части. На втором шаге — выбирает один лист из имеющихся и делит его на 3 части, на третьем шаге — выбирает один лист из имеющихся и делит его на 4, и т.д. После какого шага количество листов впервые превзойдёт 500?*

Ответ: 31

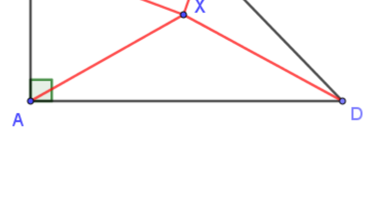
Решение. На k-м шаге количество листов увеличивается на k, поэтому после k шагов количество листов будет равно $10 + (1 + 2 + \ldots + k) = 10 + \dfrac{k(k+1)}{2}$. При $k = 30$ это количество меньше 500 (равно 475), а при $k = 31$ уже больше 500 (равно 506), поэтому ответ в задаче — 31.

4.1. *Случайным образом выбирается двузначное натуральное число* $\overline{ab}$ *от 21 до 45 (вероятность выбора одна и та же для всех чисел). Вероятность того, что число* $\overline{a8573b}$ *будет делиться на 6, равна* n *процентов. Найдите* n.

Ответ: 16

Решение. Всего имеется 25 вариантов выбора. Число $\overline{a8573b}$ делится на 6 тогда и только тогда, когда выполнены одновременно два условия: b чётно и сумма цифр $a + 8 + 5 + 7 + 3 + b$ делится на 3. Среди чисел от 21 до 45 подходят числа 22, 28, 34, 40 (каждое шестое) — это 4 варианта. Значит, искомая вероятность равна $\dfrac{4}{25}$ или 16 процентов.

5.1. *В трапеции* $ABCD$: $\angle A = \angle B = 90°$, $AD = 2\sqrt{7}$, $AB = \sqrt{21}$, $BC = 2$. *Какое наименьшее значение может принимать сумма длин* $XA + XB + XC + XD$, *где* X *— произвольная точка плоскости?*

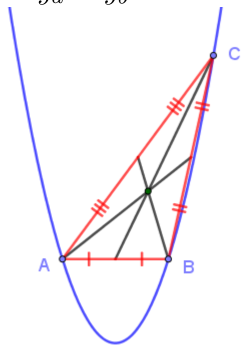


Ответ: 12

Решение. По неравенству треугольника $XA + XC \geqslant AC$, причём равенство достигается, когда X лежит на отрезке AC. Аналогично, $XB + XD \geqslant BD$, причём равенство достигается, когда X лежит на отрезке

BD. таким образом, $XA + XB + XC + XD \geqslant AC + BD$, причём равенство достигается, когда X — точка пересечения диагоналей. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 7$, отсюда $AC + BD = 12$.

6.1. *На параболе $y = x^2 - 4x - 1$ взяты три различные точки $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$. Известно, что $x_c = 5$ и $y_a = y_b$. Найдите абсциссу точки пересечения медиан треугольника ABC.*



Ответ: 3

Решение. Так как $y_a = y_b$, точки A и B симметричны относительно оси параболы, значит, середина K отрезка AB имеет абсциссу, равную абсциссе вершины параболы $x_k = 2$. Далее, по свойству медианы, точка пересечения медиан M делит медиану CK в отношении $2:1$, считая от вершины, поэтому абсцисса x_m точки M находится из равенства $x_c - x_k = 3(x_m - x_k)$. Окончательно: $x_m = \dfrac{x_c + 2x_k}{3} = 3$.

7.1. *В ряд выписаны числа $\sqrt{7,301}, \sqrt{7,302}, \sqrt{7,303}, \ldots, \sqrt{16,002}, \sqrt{16,003}$ (под знаком корня — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью $0,001$). Найдите количество рациональных чисел среди выписанных.*

Ответ: 13

Решение. Домножим числа на 100, получим $\sqrt{73010}$, $\sqrt{73020}$, $\sqrt{73030}$, $\ldots$, $\sqrt{160030}$ (при этом рациональные числа останутся рациональными, а иррациональные — иррациональными). Корень из натурального числа n является рациональным числом тогда и только тогда, когда n — точный квадрат. Далее, натуральное число, оканчивающееся на 0 (т.е. делящееся на 2 и 5) может являться точным квадратом, только если оно оканчивается на 00 (т.е. делится на 2^2 и 5^2).

Таким образом, нужное нам количество — количество точных квадратов в ряду чисел 731, 732, 733, $\ldots$, 1600. Так как $27^2 < 731 < 28^2$ и $40^2 = 1600$, то ответ равен $40 - 27 = 13$.

8.1. *72 вершины правильного 3600-угольника покрашены красным так, что покрашенные вершины являются вершинами правильного 72-угольника. Сколькими способами можно выбрать 40 вершин данного 3600-угольника так, чтобы они являлись вершинами правильного 40-угольника и ни одна из них не была красной?*

Ответ: 81

Решение. Занумеруем вершины по порядку $1, 2, \ldots, 3600$, так, чтобы покрашенными оказались вершины с номерами, кратными $3600/72 = 50$. 40 вершин являются вершинами правильного 40-угольника, если их номера дают один и тот же остаток при делении на $3600/40 = 90$. Всего есть 90 вариантов выбора правильного 40-угольника. Рассмотрим один из этих вариантов, в котором номера вершин имеют вид $a + 90k$, где $a \in \{1, 2, \ldots, 90\}$. В $90 - 9 = 81$ вариантах a не делится на 10; в таком случае $a + 90k$ не делится на 10, и, значит, не делится на 50, тем самым такие варианты нам подходят. Если же $a = 10m$, то для некоторого $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ число $m + 9k$ будет делиться на 5, и значит, $a + 90k = 10(m + 9k)$ будет делиться на 50. Тем самым, варианты, в которых a делится на 10, нам не подходят.