10 класс

1. В равностороннем треугольнике на каждой стороне отметили по 3 точки так, что они делят сторону на 4 равных отрезка. Эти точки и вершины треугольника покрасили. Сколько существует равнобедренных треугольников с вершинами в покрашенных точках?

Ответ. 20

Решение. Обозначим вершины треугольника через A, B, C. Пусть на стороне AB взяты точки M,N (M ближе к A), на стороне AC - P,Q (P ближе к A) и на стороне BC точки K и L(K ближе к B). Тогда возможны следующие варианты для равнобедренных треугольников с вершиной в точке A: ABC, AKL, APM, AQN, с вершиной в точке B: BNK, BPQ, BML, с вершиной в точке C: CQL, CPK, CMN. Еще 8 вариантов получаются без использования вершин исходного треугольника: MQK, PLM и 6 треугольников, две стороны которых равны по 1/3 стороны исходного: MNK и т.п.. Итого всего 20 вариантов.

Критерии. Найдены все варианты - 7 баллов. Найдено число вариантов одного типа - 1 балл, двух типов – 3 балла.

2. *Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике длины катетов a и b и гипотенузы c удовлетворяют неравенству $a^4+b^4<c^4$.*

Решение. Запишем неравенство в виде: $\left(\frac{a}{c}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4<1$

Для сторон прямоугольного треугольника верно: $\left(\frac{a}{c}\right)^2<1, \left(\frac{b}{c}\right)^2<1, \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$. Умножим обе части первого неравенства на выражение $\left(\frac{a}{c}\right)^2$, а обе части второго неравенства на выражение $\left(\frac{b}{c}\right)^2$. Тогда, складывая полученные неравенства, получаем $\left(\frac{a}{c}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4<\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$, что и требовалось доказать.

Критерии. Неравенство верно доказано, при этом отмечено, что $\left(\frac{a}{c}\right)^2<1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^2<1$, использована теорема Пифагора. Возможна тригонометрическая интерпретация данного неравенства и соответствующее решение 7 баллов.

Замечено, что $\left(\frac{a}{c}\right)^2<1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^2<1$, записана теорема Пифагора в виде $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$, но не сделан переход $\left(\frac{a}{c}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4<\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2$ - 2 балла.

3. Из множества натуральных чисел образовали следующую последовательность: 1, 2+3, 4+5+6, 7+8+9+10 и т.д., где в каждой последующей сумме на одно слагаемое больше. Чему равен 2023 член последовательности?

Ответ: $\frac{2023*(2023^2+1)}{2}$ =4 139 594 095.

Решение. Пусть n-я группа начинается с числа k. Тогда эти числа:

k. k+1, …k+(n-1) - всего n чисел. Их сумма является суммой арифметической прогрессии с первым членом, равным k, разностью 1 и может быть вычислена по формуле:

$$S_n = \frac{k + (k + n - 1)}{2} \cdot n = \frac{2k + n - 1}{2} \cdot n$$

Заметим, что числу k предшествует число k-*1*, которое может быть подсчитано как количество всех чисел в группах с *1*-й по *(n-1)*-ю. Так как по условию в первой группе 1 число, во второй 2 числа, и так далее, то всего чисел в первых *(n-1)* группах будет: $\frac{1+(n-1)}{2} * (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = k - 1$

Следовательно, искомая формула имеет вид:

$$S_n = \frac{2k+n-1}{2} * n = \frac{2\left(1+\frac{n(n-1)}{2}\right)+n-1}{2} * n = \frac{n(n^2+1)}{2},\ \ S_{2023} = \frac{2023\cdot(2023^2+1)}{2}$$ (далее вычислять не обязательно!)

Критерии. Обоснованно получен верный ответ - 7 баллов.

1 вычислительная ошибка - -минус 1 балл. Формулы для арифметической прогрессии использованы без упоминания арифметической прогрессии - оценка не снижается. Получена формула для S_n либо посчитано число k (либо k-1) - 2 балла. Разбор частных случаев - 0 баллов.

4. *В треугольнике ABC синус угла A равен 3/5. На стороне AC взяли точку M так, что CM=15, на стороне AB взяли точку N так, что BN=7, AN=AM, T - середина NC, P - середина B. Найдите длину отрезка PT.*

Ответ. $\sqrt{26{,}5}$**,** $\sqrt{110{,}5}$

Решение. Пусть длина AN=AM=x**.** Введем систему из двух единичных векторов: пусть вектор **b** коллинеарен вектору AB, а вектор **c** коллинеарен вектору AC**.** Тогда верны векторные соотношения:

$$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AP},\ \ \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\right),\ \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x+7)b,\ \ \overrightarrow{AC} = (x+15)c,\qquad \overrightarrow{AM} = x\vec{c},\qquad \overrightarrow{AN} = x\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}(15\,\vec{c} - 7\,\vec{b})$$

Вычисляя скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{PT}$, и учитывая, что косинус угла A может быть равен равен ⅘ для острого угла и -⅘ для тупого, получим:

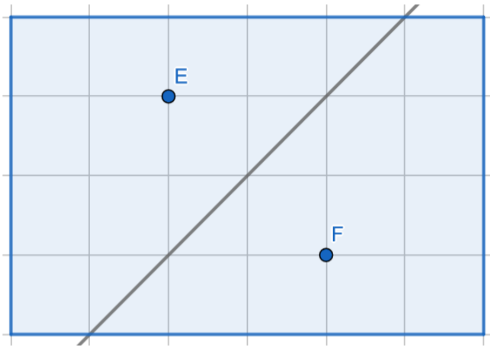
$\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PT} = \frac{1}{4}\left(49\,\vec{b}\cdot\vec{b} + 225\,\vec{c}\cdot\vec{c} - 210\vec{b}\cdot\vec{c}\right) = 26{,}5.$

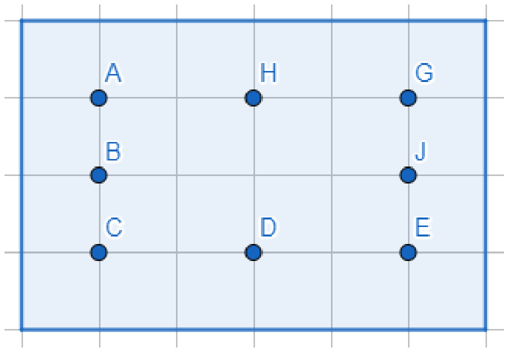
$\overrightarrow{PT} * \overrightarrow{PT} = \frac{1}{4}\left(49\,\vec{b}\cdot\vec{b} + 225\,\vec{c}\cdot\vec{c} - 210\vec{b}\cdot\vec{c}\right) = 110{,}5.$

Критерии. Обоснованно получен верный ответ для обоих случаев - 7 баллов. Решение может быть планиметрическим и не опираться на векторный метод. Разобран 1 случай - 3 балла. Арифметическая ошибка - минус 1 балл.

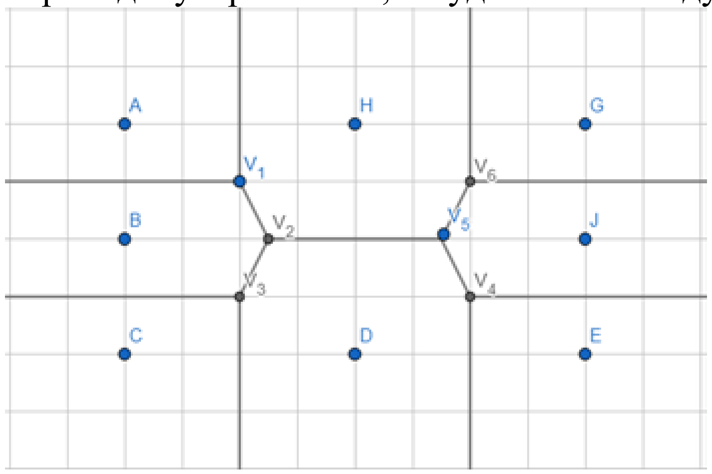
5. Иванов и Сидоров, перспективные айти-специалисты из города Нью Васюки, решили разработать приложение “Дудл-карты” своего города для удобной навигации между восемью пунктами выдачи товаров маркетплейса «Ксенон». Карта города Нью-Васюки представляет собой прямоугольник со сторонами 4 и 6 км. Было решено разбить карту города на многоугольники так, чтобы в каждой точке многоугольника, содержащем какой-то пункт «Ксенона»,

этот пункт был бы ближайшим к этой точке. Если бы в городе было всего 2 пункта, то разбиение карты выглядело бы как на рис.1. Пункты Ксенона в Нью Васюках расположены так, как изображено на рис.2, а именно в вершинах и серединах сторон прямоугольника со сторонами 2км и 4 км.





Решение. Нужное разбиение получается при пересечении серединных перпендикуляров точек, и будет иметь следующий вид:



Критерии. Получено верное разбиение на основании построения серединных перпендикуляров - 7 балл. Построена картинка, но идея построения не указана, нет упоминания серединного перпендикуляра в какой-либо форме - 3 балла. Искажения чертежа при сохранении его структуры, отсутствие перпендикулярности и симметрии на оценку не влияют! Любые отличные от приведенной конструкции разбиения - 0 баллов. Если на приведенной схеме какие-то из точек V_k совпадают, он не может считаться верным!

6. *Найдите хотя бы одно решение уравнения*

$$567x^3 + 171x^2 + 15x - 777 \dots 7555 \dots 5333 \dots 3 = 0,$$

свободный член которого содержит 2023 семерки, 2023 пятерки и 2023 тройки.

Ответ. $\underbrace{111 \dots 1}_{2023}$.

Решение. Обозначим число, десятичная запись которого состоит из 2023 единички через x и отметим следующее свойство данного числа:

$$\underbrace{111 \dots 1}_{2023} = x, \quad 9x + 1 = 10^{2023},$$

Представим число $777 \dots 7555 \dots 5333 \dots 3$ в виде:

$$777 \dots 7555 \dots 5333 \dots 3 = 3x + 5x * 10^{2023} + 7x * 10^{2*2023} =$$

$$= 3x + 5x * (9x + 1) + 7x * (9x + 1)^2 = 567x^3 + 171x^2 + 15x$$

Следовательно, число x является корнем исходного уравнения.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ - 7 баллов. Возможно решение, основанное на исследовании аналогичного уравнения со свободным коэффициентом меньшей разрядности, например такого

$567x^3 + 171x^2 + 15x - 775533 = 0$ и затем обобщении данного случая. Если из наблюдения, что x=11 является решением данного уравнения без каких-либо дополнительных рассуждений сделан вывод о решении исходного уравнения - 3 балла. Получено выражение $9x + 1 = 10^{2023}$ либо его аналог , но решение не закончено, ответ не получен - 2 балла.

Приведены попытки изучения структуры свободного коэффициента, приведено какое-то представление данного числа с использованием числа 111…1 (2023 единицы), решение не закончено, ответ не получен - 1 балл.