Условия и решения задач

(муниципальный этап олимпиады 2022 г.)

10 класс

1. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-4}\cdot|x|+\sqrt{x^2-4}\cdot x=0$**.**

Решение. Поскольку $\sqrt{x^2-4}\ge 0$, то рассмотрим два случая.

Первый случай $\sqrt{x^2-4}=0$. откуда $x=\pm 2$ – корни.

Второй случай. $\sqrt{x^2-4}>0$, откуда $|x|>2$. Тогда заданное в условии уравнение можно переписать следующим образом: $|x|+x=0$. Отсюда следует, что решением последнего уравнения является промежуток $x\le 0$. С учетом первого случая и условия $|x|>2$ получим ответ: $x\in(-\infty;\,-2]\cup\{2\}$.

Ответ: $x\in(-\infty;\,-2]\cup\{2\}$

.

2. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BD*. Известно, что центр описанной вокруг ΔABC окружности совпадает с центром окружности, вписанной в ΔBCD. Найдите углы ΔABC.

Решение. Обозначим общий центр окружностей буквой *I*, а точки касания вписанной в ΔBCD окружности со сторонами *CD, BC* и *BD* через *E*, *F*, *G* соответственно (рис. 1). Отрезки *IE* и *IF* – серединные перпендикуляры к сторонам *AC* и *BC* соответственно, а потому $AE=CE$ и $BF=CF$. Из свойств касательных к окружности $BG=BF$,$CF=CE$ и $DG=DE$, поэтому

$$BD=BG+DG=BF+DG=CF+DE=CE+DE=CD.$$

Также имеем, что

$$BC=2CF=2CE=AC.$$

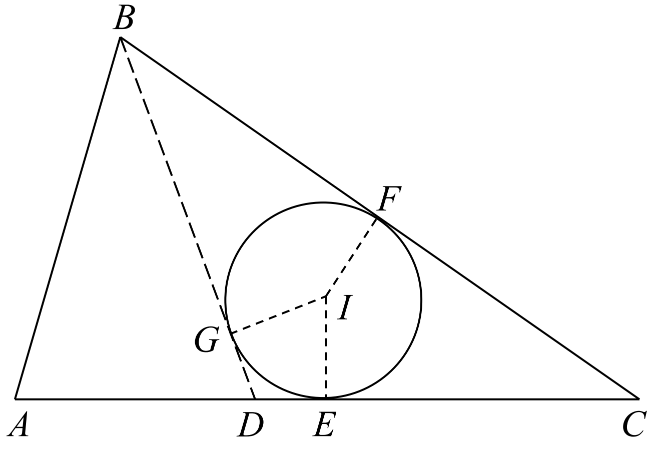

Рис. 1

Следовательно, треугольники *BDC* и *ACB* равнобедренные. Отсюда имеем, что

$$\angle BAC = \angle ABC = 2\angle DBC = 2\angle BCA \;\Rightarrow$$
$$180° = \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 5\angle BCA \;\Rightarrow$$
$$\angle BCA = 36°,\; \angle BAC = \angle ABC = 2\angle BCA = 72°.$$

Ответ: $\angle A = \angle B = 72°$, $\angle C = 36°$.

3. Сколькими способами можно раскрасить все 13 частей круга (см. рис. 2) в три цвета так, чтобы никакие две части, окрашенные одинаково, не имели общей границы? Две раскраски считаются разными, если хотя бы одна из 13 частей окрашена по-другому.

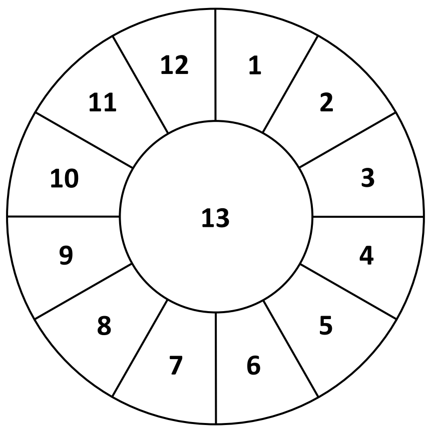

Рис. 2

Решение. Центральную часть можно покрасить в один из трех цветов. Тогда все 12 секторов придется красить в другие два цвета, ведь каждый из секторов имеет общую границу с центральной частью. Сектор 1 можно покрасить в любой из двух цветов, а цвета остальных секторов устанавливаются после этого автоматически: сектор 2 должен быть окрашен в цвет, отличный от цвета центральной части и сектора 1; сектор 3 должен быть окрашен в цвет, отличный от цвета центральной части и сектора 2 и т. д. Легко видеть, что такая раскраска действительно будет удовлетворять условию задачи, ведь пара секторов 12 и 1 также будет раскрашена по-разному.
Итак, имеем $3 \cdot 2 = 6$ вариантов раскраски.
Ответ: 6.

4. Обозначим через *P*(*n*) и *S*(*n*) в соответствии произведение и сумма цифр натурального числа n. Например, $P(133) = 9$, $S(133) = 7$. Найдите все двузначные числа *n*, для которых выполняется равенство: $n = P(n) + S(n)$.

Решение. Пусть искомое двузначное число $n = \overline{ab} = 10a + b$, $a \neq 0$. Уравнение из условия приобретает следующий вид:
$$10a + b = ab + a + b \;\Leftrightarrow\; 10a = a(b+1) \;\Leftrightarrow\; 10 = b + 1 \;\Leftrightarrow\; b = 9.$$
Следовательно, условию удовлетворяют все двузначные числа, заканчивающиеся на 9, и только они.
Ответ: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

5. В каждой клетке квадратной таблицы 4×4 содержится число 0 или число 1. Рядом с таблицей записали 10 чисел: суммы чисел 4 строк, суммы чисел 4 столбцов и суммы чисел на каждой из 2-х больших диагоналей (тех диагоналей, содержащих по четыре клетки). Докажите, что среди полученных десяти чисел есть по крайней мере три одинаковых.

Доказательство. В каждой строке, столбце и на каждой диагонали содержатся четыре числа, каждое из которых равно 0 или 1, поэтому каждая записанная сумма может быть одним из пяти чисел: 0, 1, 2, 3, 4. Если бы среди 10 сумм не было трех одинаковых, это означало бы, что каждое из пяти возможных значений встречается среди сумм ровно дважды. Пусть это действительно так. Рассмотрим одну из двух линий, сумма чисел на которой равна 4; такая линия состоит исключительно из единиц. Это не может быть диагональ, ведь тогда в каждой строке и в каждом столбце содержалась бы, по крайней мере, одна единица, то есть количество линий с суммой 0 было бы меньше двух. Пусть тогда, без потери всеобщности, линия с суммой 4 – строка. Это означает, что в каждом столбце и на каждой диагонали есть, по крайней мере, одна единица. Тогда две линии с суммой чисел 0 – тоже строки. Но в таком случае вторая линия с суммой 4 тоже не может быть ни столбиком, ни диагональю, то есть является строкой. Итак, имеем по две строки с суммами 0 и 4, что означает, что сумма чисел в каждом из четырех столбцов равна 2, а это противоречит предположению, что каждое значение от 0 до 4 встречается среди сумм ровно дважды. Полученное противоречие и завершает доказательство.