Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2022-2023 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 10 класс

10.1 *Чудак не поленился и записал по кругу 2022 числа, причём оказалось, что каждое число совпадает с модулем разности двух его соседей. Определите, какие числа были записаны, если их сумма равна* 2022.

Решение 1: Заметим, что все написанные числа неотрицательны. Пусть наибольшее из них равно N. Разность двух чисел от 0 до N может быть равна N только тогда, когда это числа 0 и N, поэтому с одной стороны от числа N стоит 0, а с другой — тоже N. При этом если с одной стороны от нуля стоит число N, то и с другой стороны стоит N. Значит, числа на окружности идут в таком порядке: $N, N, 0, N, N, 0, ..., N, N, 0$. Их сумма равна $1348N = 2022$, поэтому $N = 3/2$.

Решение 2: Заметим, что все написанные числа неотрицательны. Если выписано число 0 или среди стоящих рядом чисел есть два одинаковых, то числа идут в порядке $N, N, 0, N, N, 0, ...$ и $N = 3/2$. В противном случае соседние числа не могут быть равны, и пусть $a < b$ — два соседних числа, где $0 < a$. Вторым соседом b может быть либо $a+b$, либо $a-b$. Поскольку $a-b$ отрицательно, с другой стороны стоит $a+b$. Аналогично за $a+b$ идёт $a+2b$, затем $a+3b$ и т.д. Получаем, что каждое следующее число в круге больше предыдущего, что невозможно.

Критерии:

- Только ответ с примером — 1 балл;
- Задача решена в случае, когда среди чисел есть 0 — 3 балла.

10.2 *Про числа a и b известно, что система уравнений*

$$\begin{cases} y = x^2 + ax + b \\ x = y^2 + ay + b \end{cases}$$

не имеет решений. Докажите, что $b > 0$.

Решение 1: Графики уравнений $x = y^2+ay+b$ и $y = x^2+ax+b$ симметричны относительно прямой $y = x$. Если график $y = x^2 + ax + b$ пересекается с осью симметрии, то через точку пересечения проходит и второй график, и система имеет решение. Поскольку при больших x график проходит выше прямой, он проходит над прямой и при $x = 0$. Это означает, что $b > 0$.

Решение 2: Выразим y из первого уравнения и подставим во второе, а затем перенесём x из левой части в правую. Получившийся многочлен раскладывается на множители как $(x^2 + ax + b - x)(x^2 + ax + b + x + a + 1)$. Если у него нет корней, то корней нет и у уравнения $x^2+(a-1)x+b = 0$. Его дискриминант равен $(a-1)^2-4b$ и может быть отрицательным только при положительных b.

Критерии:

- Замечено, что уравнение $x = x^2 + ax + b$ не имеет корней — 3 балла;
- За отсутствие объяснения, как получено разложение на множители, баллы не снижаются.

10.3 *На доске нарисовали остроугольный $\triangle ABC$, отметили основания высот A_1, B_1 и C_1. Затем весь чертёж стёрли, кроме точек A_1, B_1 и C_1. Можно ли восстановить исходный $\triangle ABC$ с помощью циркуля и линейки?*

Решение: Углы $\angle AA_1B$ и $\angle BB_1A$ равны, поэтому четырёхугольник AB_1A_1B вписанный, $\angle B_1A_1C = \angle A$. Аналогично $\angle C_1A_1B = \angle A$. Значит, стороны треугольника ABC являются внешними биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$. Это построение можно выполнить циркулем и линейкой.

Критерии:

- Утверждение “высоты $\triangle ABC$ являются биссектрисами $\triangle A_1B_1C_1$” принимается без доказательства.

$\boxed{10.4}$ *Чудак отметил в клетчатом квадрате $N \times N$ центры 17 клеток так, что расстояние между любыми двумя отмеченными точками больше 2. Какое наименьшее значение может принимать N?*

Решение: Покажем, что в квадрате 8×8 (а тогда и любого меньшего размера) так отметить клетки нельзя. Действительно, разобьём квадрат на квадратики 2×2. В каждом из них попарные расстояния между центрами клеток не превосходят $\sqrt{2}$, поэтому из четырёх клеток отмечено не более одной. Но тогда всего отмеченных клеток не более 16.

Пример для квадрата 9×9:

		X					X	
X					X			
			X					X
	X					X		
				X				
		X					X	
X					X			
			X					X
	X					X		

Критерии:
- Доказано только, что $N > 8$ — 3 балла;
- Приведён только пример на $N = 9$ — 3 балла;
- За отсутствие обоснования у примера баллы не снижаются.

$\boxed{10.5}$ *Найдутся ли три таких иррациональных числа, что их сумма – целое число и сумма обратных величин тоже целая?*

Решение 1: Рассмотрим многочлен $f(x) = x^3 - 30x^2 + 31x - 1$. Поскольку $f(0) < 0, f(1) > 0, f(2) < 0, f(100) > 0$, уравнение $f(x) = 0$ имеет три вещественных корня x_1, x_2, x_3. Числа ± 1 не являются корнями, поэтому все корни уравнения иррациональны. При этом по теореме Виета их сумма равна 30, а сумма обратных равна $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3} = 31$.

Решение 2: Пусть $c = \sqrt{2}+1$. Заметим, что функция $h(a) = a+\frac{1}{a}$ непрерывна и неограничена на $(0, \infty)$, поэтому уравнение $h(a)+c = N$ имеет решение при достаточно большом натуральном N. Поскольку при рациональных a значение $h(a)$ рационально, а $h(a) + c$ иррационально, соответствующее решение a_0 иррационально. Итак, в тройке $a_0, \frac{1}{a_0}, c$ все числа иррациональны, а их сумма равна N. При этом сумма обратных к ним равна $\frac{1}{a_0} + a_0 + \frac{1}{c} = h(a_0) + c - 2 = N - 2$.

Критерии:
- Неочевидна иррациональность приведённых чисел и/или целостность их суммы и суммы обратных — снимается до 3 баллов;
- Числа приводятся как корни многочлена, но не проверяется, что этот многочлен имеет три иррациональных корня — не более 3 баллов;
- Утверждение “корень целой степени из целого числа — число либо целое, либо иррациональное” и следствия из него принимаются без доказательства.