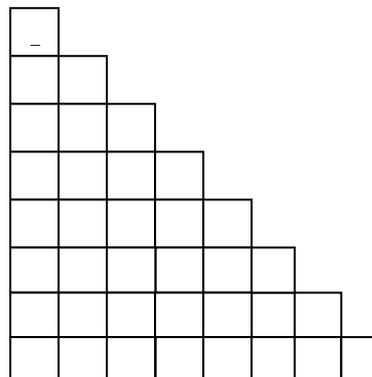


**Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
по МАТЕМАТИКЕ (2022 - 2023 уч. год)**

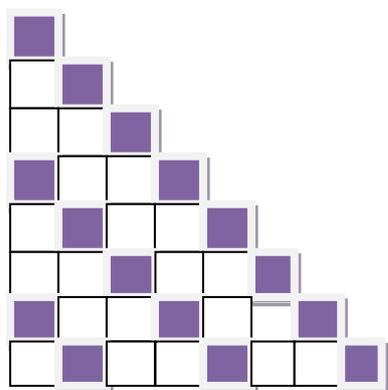
10 класс

1. Можно ли фигуру, изображенную на рисунке, замостить без наложений и просветов полосками 1×3 ? Ответ объяснить.



Решение

Введем раскраску как на рисунке.



Каждая полоска 1×3 накрывает ровно одну закрашенную клетку. Поскольку для замощения доски требуется 12 полосок, то закрашенных клеток должно быть ровно 12, а их 15. Поэтому нельзя.

Критерии оценивания

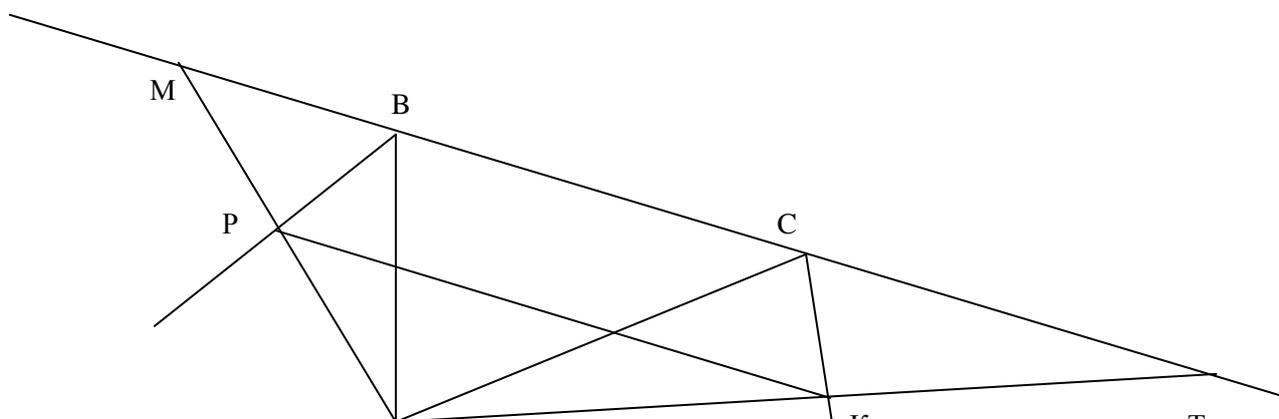
Только верный ответ – 0 баллов.

Предложена раскраска, с помощью которой можно доказать, что заданную фигуру заданными полосками замостить нельзя, но отсутствует объяснение этому или объяснение не является исчерпывающим – 5 баллов.

Верно решенная задача – 7 баллов.

2. На биссектрисы внешних углов ABC и ACB треугольника ABC из его вершины A опущены перпендикуляры AP и AQ . Найти длину отрезка PQ , если периметр треугольника ABC равен P .

Решение



В треугольнике ABC проведем биссектрисы и внешних углов при вершинах B и C. Опустим на них перпендикуляры из вершины A. Продлим построенные перпендикуляры до пересечения с прямой, содержащей сторону BC треугольника ABC.

Треугольник ABP равен треугольнику MBP, а треугольник ACK равен треугольнику TCK. Отсюда делаем вывод о равенстве соответствующих сторон треугольников и о том, что отрезок PK - средняя линия треугольника AMT.

$$PK = \frac{MT}{2} = \frac{MB + BC + CT}{2} = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{p}{2}$$

Критерии оценивания

Рассмотрены отдельные шаги, являющиеся существенными для решения - 1-3 балла в зависимости от продвижения по задаче.

Решение выполнено, ответ получен, однако имеются неточности в обоснованиях или рассуждениях - 4-6 баллов.

Полное и верно обоснованное решение задачи - 7 баллов.

3. Три мотоциклиста стартуют одновременно из одной точки кольцевого шоссе в одном направлении. Первый мотоциклист впервые догнал второго, сделав 4,5 круга после старта, а за 30 минут до этого он впервые догнал третьего мотоциклиста. Второй мотоциклист впервые догнал третьего через три часа после старта. Сколько кругов в час делает первый мотоциклист?

Решение

Пусть x , y , z кругов в час – скорости первого, второго и третьего мотоциклистов соответственно.

Выразим различными способами время за которое первый мотоциклист догонит второго, первый - третьего и второй третьего.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = \frac{4,5}{x}, \\ \frac{1}{x-z} = \frac{4,5}{x} - \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y-z} = 3 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим ответ $x=3$.

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Получены отдельные выражения для времени отдельных мотоциклистов -1 балл.

Верно составлены одно, два или три уравнения системы или, если был выбран другой способ решения, в зависимости от продвижения в решении - 2-4 балла.

Решение задачи завершено, но содержит одну или две арифметические ошибки, в результате которых получен неверный ответ - 5-6 баллов.

Обоснованно получен верный ответ - 7 баллов.

4. Сколько целочисленных решений (x, y) имеет неравенство $|x| + |y| \leq n$?

Решение

Графическая интерпретация неравенства - квадрат со сторонами на прямых $x + y = n$, $-x + y = n$, $x - y = n$, $-x - y = n$. Стороне, лежащей на прямой $x + y = n$, соответствует $n+1$ точка с целочисленными координатами, стороне, лежащей на прямой $-x + y = n$, соответствует $n+1$ точка с целочисленными координатами, одна из которых принадлежит стороне, лежащей на прямой $x + y = n$, поэтому считаем n точек. Следующая прямая добавляет еще n точек, четвертая прямая - $n-1$ точку. Таким образом, на сторонах квадрата оказывается $4n$ точек. На сторонах ближайшего внутреннего квадрата - $4(n-1)$ точка. Началу координат - 1 точка. суммарное количество точек $1+4*1+4*2+\dots+4*n=1+2(n+1)n$.

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Решение начато, осуществляется подсчет решений (аналитически или графически), но решение не доведено до ответа - 1-3 балла в зависимости от продвижения.

Ответ получен, но имеется одна или несколько ошибок в подсчете количества точек - 4-6 баллов.

Полное и верно обоснованное решение задачи - 7 баллов.

5. Представить в виде алгебраического выражения (упростить) сумму $8+88+888+8888+\dots+8\dots8$, если последнее слагаемое в своей записи содержит n раз цифру восемь.

Решение

$$8+88+888+8888+\dots+8\dots8=8(1+11+111+\dots+1\dots1)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}10-1 &= 9*1, \\100-1 &= 9*11, \\&\dots\dots\dots \\10^n - 1 &= 9 * 1 \dots 1,\end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \frac{8}{9} \left(\frac{10 \times 10^n - 10}{9} - n \right) = \frac{8}{81} (10^{n+1} - 10 - 9n).$$

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Предложен способ подсчета суммы и выполнены отдельные выкладки - 1-2 балла в зависимости от продвижения по задаче.

Указан способ подсчета суммы, но допущены ошибки при составлении выражений 3-5 баллов.

Обоснованно получен верный ответ - 7 баллов.