ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2022-2023 учебный год. Камчатский край
возрастная группа 10 класс
Максимальное количество баллов 35

10.1. Назовём праздничными следующие 2 операции, содержащие по 2 арифметических действия: за первую праздничную операцию число уменьшается вдвое (если оно чётное), затем увеличивается на 1, за вторую - число увеличивается в 5 раз, а затем увеличивается на 1. Можно ли получить из числа 2023 число 2022 производя только праздничные операции?

Решение:

За вторую операцию можно получить число, в разряде единиц которого, стоит 1 или 6. Значит, 2022 мы можем получить только первой операцией.

$10x+2=\frac{y}{2}+1$, где x – некоторое целое число, а y – число, полученное до применения первой операции. Получаем $y=20x+2$. Таким образом, можно утверждать, что после применения первой операции число, в разряде единиц которого, стоит 2, может получиться только из такого же. Однако не может получиться в результате первой операции.

2023 – число нечётное, значит, нам нужно применять обе операции.

Ответ: Нет, не может.

Критерии	*баллы*
1. Полное решение задачи	7
2. В целом верное решение. Утверждается, но не расписано, почему в результате первой операции 2 в разряде единиц, получится только из числа с 2 в разряде единиц.	6
3. Указаны оба утверждения о последней цифре, но не показано противоречие.	2
4. Указано одно из утверждений о последней цифре.	1
5. Неверное решение.	0

10.2. Известно, что для чисел x, y, z справедливо равенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$. Докажите, что какие-то два из этих чисел являются противоположными друг другу.

Решение:

Допустим, что нет двух числе противоположных друг другу, тогда $x+y\neq 0$, $x+z\neq 0$ и $y+z\neq 0$.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{z}$ => $\frac{x+y}{xy}=\frac{z-x-y-z}{z(x+y+z)}$ => $\frac{x+y}{xy}=\frac{-(x+y)}{z(x+y+z)}$

Пользуясь тем, что $x+y\neq 0$, разделим обе части на $x+y$.

$xy=-xz-yz-z^2$ => $x(y+z)=-z(y+z)$ => $(y+z)(x+z)=0$

Таким образом, получаем, что либо $y+z=0$, либо $x+z=0$, что противоречит исходному утверждению, значит, какие-то два числа являются противоположными.

Критерии	*баллы*
1. Полное решение задачи.	7
2. Неверное решение.	0

10.3. При каких простых p, значение выражения $22p^2+23$ является простым?

Рассмотрим все остатки при делении на 3.

1) Если $p=3k$ (делится нацело), значит $p=3$, только одно простое число делится нацело на 3. Тогда $22p^2+23=221$. $221=17\cdot 13$, то есть составное.
2) Если $p=3k\pm 1$ (даёт остаток 1 или 2), значит
$$22p^2+23=22(3k\pm 1)^2+23=22\cdot 9k^2\pm 22\cdot 6k+22+23=$$
$=22\cdot 9k^2\pm 22\cdot 6k+45$. Каждое слагаемое делится на 3 и сумма не меньше, чем 23. Значение выражения – составное.

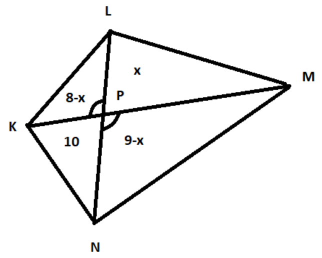
Ответ: ни при каких.

Критерии	баллы

1. Полное решение задачи	7
2. Доказано, что если р не делится на 3, то значение выражения - составное, но утверждается, что 221 – простое. Получен неверный ответ.	3
3. Рассмотрен только случай, где $p = 3$.	1
4. Неверное решение.	0

10.4. Пусть точка P является пересечением диагоналей выпуклого четырёхугольника $KLMN$. Площади треугольников KLM, LMN и NKP равны 8 м^2, 9 м^2 и 10 м^2 соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

<u>*Решение:*</u>



Пусть $S_{PLM} = x$, а $\angle NPM = \angle KPL = \alpha$, тогда $S_{KLP} = 8 - x$, $S_{NPM} = 9 - x$, $\angle KPN = \angle LPM = 180^0 - \alpha$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(180^0 - \alpha)\, PL \cdot PM \quad (1) \\ 9 - x = \dfrac{1}{2} sin\ \alpha\ \cdot PM \cdot PN \quad (2) \\ 10 = \dfrac{1}{2}\sin(180^0 - \alpha)\, PN \cdot PK \quad (3) \\ 8 - x = \dfrac{1}{2} sin\ \alpha\ \cdot PK \cdot PL \quad (4) \end{cases}$$

Перемножив соответствующие части (1) с (3) равенств и (2) с (4), учитывая, что $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$, получим: $10x = \frac{1}{2}\sin^2(180^0 - \alpha)\, PL \cdot PM \cdot PN \cdot PK = \frac{1}{2}\sin^2\ \alpha\ \cdot PL \cdot PM \cdot PN \cdot PK = (9 - x)(8 - x)$.

Данное соотношение можно получить через подобие.

Откуда $x^2 - 27x - 72 = 0$. Решим квадратное уравнение: $x_1 = 24$ (чего быть не может, так как $8 - x > 0$) и $x_2 = 3$.

$$S_{KLMN} = x + (9 - x) + (8 - x) + 10 = 3 + 6 + 5 + 10 = 24$$

Ответ: $S_{KLMN} = 24$ м^2.

Критерии	*баллы*
Полное решение задачи.	7
Найдена площадь одного из внутренних треугольников, но не посчитана площадь всего четырёхугольника.	5
Обосновано уравнение, но не решено.	3
Неверное решение.	0

10.5. Какое наименьшее значение может принимать НОД(x, y), где x и у – натуральные числа, если НОК$(x, y) = (x - y)^2$?

<u>*Решение:*</u>

При $x = 4$ и $y = 2$, НОК$(x, y) = (x - y)^2 = 4$, а НОД$(x, y) = 2$. То есть 2 получить возможно.

Предположим, что НОД$(x, y) = 1$ (числа взаимнопросты). Значит НОК$(x, y) = xy$. Из условия получаем, что $xy = x^2 - 2xy + y^2$. Получаем $x^2 - 3xy + y^2 = 0$. Решая полученное квадратное уравнение относительно x, получим дискриминант $5y^2$. Квадратный корень из дискриминанта $\sqrt{5} \cdot y$ – число иррациональное, а для того, чтобы x было натуральным, должно быть рациональным. Противоречие. Значит НОД$(x, y) \neq 1$.

<u>*Ответ:*</u> 2.

Критерии	*баллы*
Полное решение задачи.	7
Доказано, что НОД$(x, y) \neq 1$. Получен верный ответ, но не приведён пример чисел для НОД$(x, y) = 2$.	5
Верный ответ с примером.	2
Только верный ответ, без оценки и примера.	0

Неверное решение.	0