10 класс

1. В клетках квадрата 3×3 записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы каждые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля?

a	b	c
d	e	f
g	h	i

a	h	c
f	e	d
g	b	i

Ответ: можно.
Решение. См рис.

2. Квадратный трёхчлен $ax^2 + 2bx + c$ имеет два различных корня, а квадратный трёхчлен $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ корней не имеет. Докажите, что у первого трёхчлена корни разного знака.
Решение. Пусть x_1, x_2, D_1 – корни и упрощённый дискриминант первого трёхчлена, D_2 – упрощенный дискриминант второго трёхчлена.
По теореме Виета $x_1x_2 = {}^{c}/_{a}$, поэтому достаточно доказать неравенство $ac < 0$.
У первого трёхчлена есть два различных корня, поэтому $D_1 = b^2 - ac > 0$. У второго трёхчлена корней нет, поэтому $D_2 = b^4 - a^2c^2 < 0$.
Так как $b^4 - a^2c^2 = (b^2 - ac)(b^2 + ac)$, то $b^2 + ac < 0$. Тем более, $ac < 0$.

3. Окружность проходит через вершину B треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках X и Y соответственно, и касается стороны AC в ее середине M. Известно, что AX = XM. Докажите, что CY = YM.
Решение. Из равнобедренного треугольника AXM: ∠XAM = ∠AMX. ∠AMX = ∠XBM (угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду). Тогда в треугольнике AMB ∠BAM = ∠ ABM, значит MC = AM = BM. В треугольнике CMB MC = MB, значит ∠MBC = ∠ MCB. ∠YMC = ∠MBY (угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду). Получаем, что ∠YMC = ∠YCM, откуда CY = YM, что и требовалось доказать.

4. Каждый день, с понедельника по пятницу, ходил старик к синему морю и закидывал в море невод. При этом каждый день в невод попадалось не больше рыбы, чем в предыдущий. Всего за пять дней старик поймал ровно 100 рыбок. Какое наименьшее суммарное количество рыбок он мог поймать за три дня – понедельник, среду и пятницу?
Ответ: 50.
Решение. Оценка. Во вторник и в четверг старик поймал рыбок не больше, чем в понедельник и в среду, значит, за указанные три дня он поймал не меньше половины от 100, то есть не меньше 50 рыбок.
Пример. Если в каждый из первых четырёх дней старик ловил по 25 рыбок, а в пятницу не поймал ничего, то условия задачи выполнены, и за указанные три дня поймано ровно 50 рыбок.

5. Даны $n + 1$ попарно различных натуральных чисел, меньших $2n$ ($n > 1$). Докажите, что среди них найдутся три таких числа, что сумма двух из них равна третьему.
Решение. Рассмотрим самое большое число из данных. Пусть оно равно $x<2n$. Покажем, что есть два числа с суммой x. Допустим таких чисел нет.
Если x нечетно. Тогда из каждой пары (1, x-1), (2, x-2), …, ((x-1)/2,(x-1)/2+1) взято не более одного числа, и всего взято не более $(x-1)/2 + 1 \le (2n-2)/2+1 = n$ чисел. Противоречие.
Если x четно. Тогда из каждой пары (1, x-1), (2, x-2), …, (x/2-1,x/2+1) выбрано не более одного числа и еще, возможно, выбрано число x/2.
Тогда выбрано всего не более $x/2-1 + 1 + 1 \le (2n-2)/2 +1 = n$ чисел. Противоречие.