Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2022/23 уч.г.
Математика, 10 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

****Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям***

10.1. Составьте приведённое квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $2-\sqrt{7}$.

Ответ. $x^2-4x-3=0$.

Решение. Если $a-\sqrt{b}$ является корнем уравнения x^2+px+q, то и $a+\sqrt{b}$ – корень этого уравнения. Действительно, по теореме Виета сумма корней равна $-p$ (целому числу), значит, второй корень имеет вид $c+\sqrt{b}$, и их произведение также равно целому числу q, откуда $c=a$. Таким образом, уравнение имеет корни $2\pm\sqrt{7}$. По теореме Виета $p=-4$, $q=-3$.

Комментарий. *Верный ответ (в том числе, и найденный подбором), для которого любым способом показано, что он удовлетворяет условию – 7 баллов. В данном решении баллы раскладываются так: обосновано, что уравнение имеет корни $2\pm\sqrt{7}$ – 5 баллов, найдены коэффициенты уравнения – 2 балла; баллы суммируются. Приведено только окончательное уравнение без обоснования и проверки – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.2. Сколько существует прямоугольных трапеций $ABCD$, у которых углы A и B прямые, $AD=2$, $CD=BC$, стороны имеют целую длину, и периметр меньше 100?

Ответ. 5.

Решение. Обозначим $CD=BC=a$, $AB=b$. Опустим перпендикуляр из точки D на BC, и запишем теорему Пифагора: $(a-2)^2+b^2=a^2$. Отсюда $b^2=4(a-1)$, $a=\frac{b^2}{4}+1$. Пусть $AD=2$ – меньшее основание трапеции. Периметр $P=2a+b+2<100$. Подставим a: $2a+b=\frac{b^2}{2}+2+b<98$, или $b^2+2b+4<196$, $(b+1)^2<193$, $b+1\le 13$, $b\le 12$. Из неравенства треугольника $a-2+b>a$, то есть $b>2$. Учитывая, что $a=\frac{b^2}{4}+1$, откуда b должно быть чётным, получаем допустимые значения b: $4, 6, 8, 10, 12$.

Пусть $AD = 2$ – не меньшее основание трапеции. Тогда $a = 1$ или $a = 2$. В первом случае наблюдается противоречие с соотношением $a = \frac{b^2}{4} + 1$. Во втором случае четырёхугольник $ABCD$ превращается в квадрат, который трапецией не считается.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что b≤12 – 4 балла. Не отброшены нечётные значения b – снимается 3 балла. Не отброшено значение b=2 – снимается 1 балл. Верный ответ получен подбором чисел, удовлетворяющих условию, но не показано, что другие ответы невозможны – 3 балла, если есть неполное обоснование – 4-5 баллов. Подбором найдена часть ответов – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.3. В мешке лежат фишки двух цветов, синие и зелёные. Вероятность вынуть две фишки одного цвета равна вероятности вынуть две фишки разного цвета (вынимают одну фишку за другой без возвращения). Известно, что синих фишек больше, чем зелёных, а всего фишек больше 2, но меньше 50. Сколько синих фишек может быть в мешке? Найдите все ответы.

Ответ. $3, 6, 10, 15, 21, 28$.

Решение. Обозначим число синих фишек n, число зелёных – m. Тогда $\frac{nm+mn}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$, или $2nm = n(n-1) + m(m-1)$, откуда $(n-m)^2 = n+m$. Таким образом, общее число фишек (обозначим его a) должно быть полным квадратом, то есть a может принимать значения $4, 9, 16, 25, 36, 49$. Число синих фишек найдем из системы $\begin{cases} n+m=a \\ n-m=\sqrt{a} \end{cases}$. Решая систему, получаем $n = \frac{a+\sqrt{a}}{2}$. Поэтому $n \in \{3, 6, 10, 15, 21, 28\}$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Получено уравнение 2nm= n(n-1)+m(m-1) – 3 балла. Найдены возможные значения общего числа фишек – 5 баллов. Ответы найдены подбором, показано, что они удовлетворяют условию, но не доказано, что других ответов нет – 3 балла. Найдена подбором только часть ответов – 2 балла. Найден подбором только один ответ – 1 балл. За каждую арифметическую ошибку снимается 1 балл. Приведены только ответы без обоснования – 0 баллов.*

10.4. Для различных ненулевых действительных чисел a, b, с выполняются равенства

$$a + \frac{2}{b} = b + \frac{2}{c} = c + \frac{2}{a} = d.$$

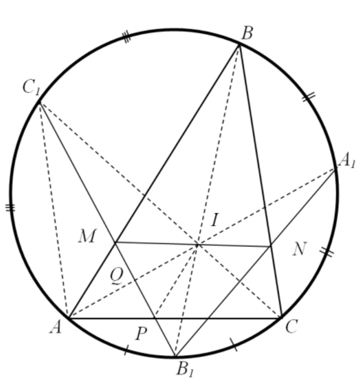
Найдите все возможные значения числа d.

Ответ. $\pm\sqrt{2}$.

Решение. Выразим из равенств b и c, получим $b = \frac{2}{d-a}, c = \frac{da-2}{a}$. Отсюда $b + \frac{2}{c} = \frac{2}{d-a} + \frac{2a}{da-2} = d$. Приведём к общему знаменателю: $2(da-2) + 2a(d-a) = d(d-a)(da-2)$, или $2da - 4 - 2a^2 - d^3a + a^2d^2 + 2d^2 = 0$. Сгруппируем первый член с четвёртым, второй член с шестым, третий с пятым: $ad(2-d^2) + 2(d^2-2) + a^2(d^2-2) = 0$, получим разложение $(d^2-2)(a^2 - ad + 2) = 0$. Отсюда $d^2 = 2$, или $a^2 - ad + 2 = 0$. Но в последнем случае $a = \frac{d \pm \sqrt{d^2-8}}{2}$, и $c = d - \frac{2}{a} = d - \frac{4}{d \pm \sqrt{d^2-8}} = d - \frac{4(d \mp \sqrt{d^2-8})}{8} = \frac{d \pm \sqrt{d^2-8}}{2}$, то есть $a = c$, а по условию a и c различны.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Получено разложение на множители, найдено $d^2 = 2$, но случай $a^2 - ad + 2 = 0$ не исключён – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

5) Биссектрисы углов A, B и C остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около этого треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые AB и B_1C_1 пересекаются в точке M, а прямые BC и A_1B_1 – в точке N. Верно ли, что прямая MN проходит через центр вписанной в треугольник ABC окружности?



Ответ. Да, верно.

Решение. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC (точка I является точкой пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1), и пусть прямая B_1C_1 пересекает сторону AC и биссектрису AA_1 в точках P и Q соответственно. Тогда

$$\angle AQC_1 = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AC}_1 + \overset{\smile}{A_1B_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\overset{\smile}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{CA}\right) = 90°.$$

Поскольку BB_1 – биссектриса, из равенства углов ABB_1 и B_1BC следует равенство дуг CB_1 и B_1A, а значит, и равенство углов AC_1B и B_1C_1C, опирающихся на эти дуги. Поэтому B_1C_1 – биссектриса угла AC_1I. Кроме того, из перпендикулярности прямых AI и B_1C_1 следует, что треугольник AC_1I – равнобедренный, $AC_1 = C_1I$, и значит, CQ – медиана. Поскольку MQ тоже делит AI пополам, отсюда также получается свойство равнобедренности треугольника AMI, $AM = MI$. Аналогично доказывается, что B_1C_1 – биссектриса углов AB_1I и равнобедренность треугольника API. Так как AI – биссектриса угла A, треугольники AMI и API имеют общую сторону AI и два равных прилежащих к этой стороне угла. Значит, эти треугольники равны, и четырёхугольник $AMIP$ – ромб, поэтому $MI \parallel AC$. Аналогично устанавливается, что $NI \parallel AC$, то есть точки M, I и N лежат на одной прямой.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*