

10 класс

10.1. Учитель математики договорился с пришедшими на факультатив одиннадцатью школьниками, что он выйдет из кабинета, а школьники договорятся между собой, кто из них будет лжецом (всегда лгать), а кто – рыцарем (всегда говорить правду). Когда учитель вернулся в класс, он попросил школьников, чтобы каждый из них сказал про каждого из остальных кто он: рыцарь или лжец. Из 110 ответов 56 были «Он – лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди школьников?

Ответ. 7.

Решение. Фразу «Он – рыцарь» скажут рыцарь про рыцаря и лжец про лжеца, а фразу «Он – лжец» скажут рыцарь про лжеца и лжец про рыцаря. Следовательно, в каждой паре «рыцарь-лжец» фраза «Он – лжец» прозвучит дважды. Поскольку всего эта фраза прозвучала 56 раз, пар рыцарь-лжец всего 28, откуда находим, что рыцарей 7, а лжецов 4, или наоборот.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.2. Можно ли разрезать куб $20 \times 20 \times 20$ на прямоугольные параллелепипеды такие, что у каждого из них длина, ширина и высота в некотором порядке являются последовательными натуральными числами?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина, ширина и высота параллелепипеда являются тремя последовательными натуральными числами, то это означает, что одна из этих величин – число, делящееся на 3. Поэтому объем каждого параллелепипеда разрезания будет делиться на 3. Значит, и сумма объемов параллелепипедов разрезания также будет делиться на 3. Но эта сумма должна равняться объему куба с ребром 20, то есть числу не делящемуся на 3. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.3. Числа a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите, что если в треугольнике угол, лежащий против стороны b , больше 60° , то уравнение $ax^2 + 2bx + c = 0$ имеет два различных корня.

Решение. Запишем теорему косинусов: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$. Из условия следует, что $\cos \beta < 0,5$, значит, $b^2 > a^2 + c^2 - ac$. Оценим четверть дискриминанта данного в условии трехчлена: $D/4 = b^2 - ac > a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2 \geq 0$, то есть $D > 0$. Утверждение доказано.

10.4. На окружности с центром O и диаметрами AB и CD выбраны точки E и F так, что OD – биссектриса угла EOB и $AE = CF$ (точки E и F – по разные стороны от CD). Докажите, что хорда EF отсекает от угла EDC равнобедренный треугольник.

Решение. Пусть хорда EF пересекает радиус OD в точке K . Докажем равенство углов EDK и EKD . По свойству вписанных углов $\angle EDK = \angle EDC$ измеряется половиной градусной меры дуги EAC , то есть полусуммой градусных мер дуг EA и AC . Угол EKD является полусуммой градусных мер дуг ED и FC . Вторая дуга равна дуге EA , так как равны стягивающие их хорды AE и CF . Теперь утверждение задачи следует из того, что дуги AC

и DB , заключенные между диаметрами окружности, равны, и дуги ED и DB равны, поскольку радиус OD является биссектрисой угла EOB .

10.5. По кругу выписано 103 числа. Известно, что среди любых пяти подряд идущих чисел найдутся хотя бы два положительных числа. Какое наименьшее количество положительных чисел может быть среди этих 103 выписанных чисел?

Ответ. 42.

Решение. Покажем, что найдутся 3 подряд идущих числа, среди которых есть по крайней мере 2 положительных. Это можно сделать, например, так. Рассмотрим 15 подряд идущих чисел. Они разбиваются на 3 пятерки подряд идущих чисел, значит, среди них есть по крайней мере 6 положительных. Но эти 15 чисел можно разбить на 5 троек подряд идущих чисел. Значит, по принципу Дирихле, в какой-то тройке есть хотя бы 2 положительных числа.

Зафиксируем эти 3 подряд идущих числа. Среди них есть хотя бы 2 положительных. Остальные 100 разобьем на 20 пятерок подряд идущих. В каждой такой пятерке будет не менее двух положительных чисел. Таким образом, общее количество положительных чисел не менее $2+2\cdot 20=42$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Положительными можно взять числа с номерами 1, 2, 6, 7, ..., 96, 97, 101, 102.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что положительных чисел не меньше 42 – 5 баллов.

Приведен пример с 42 положительными числами – 2 балла.