ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022/23 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

Задания для обучающихся

Время выполнения заданий – 235 минут

Максимальное количество баллов – 42

Написать только ответ — мало! Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!

1. Буратино вышел из дома папы Карло и пришёл на Поле Чудес ровно в 22:00. Если бы скорость, с которой он шёл, была на 25% больше, то он пришёл бы в 21:30. В какое время он вышел из дома?

2. Трехзначное число, все цифры которого различны, назовем *сбалансированным*, если оно равно сумме всевозможных двузначных чисел, составленных из различных цифр этого числа. Приведите пример какого-нибудь сбалансированного числа. Ответ обоснуйте.

3. На турнире каждый из участников должен был сыграть с каждым из оставшихся ровно по одной партии, но двое участников выбыли по ходу турнира, сыграв только по 4 партии. Поэтому число всех сыгранных партий оказалось равным 62. Сколько всего было участников?

4. Существуют ли положительные числа a, b, c такие, что числа d и $\sqrt{d}$ являются соответственно корнями уравнений $ax^2+bx-c=0$ и $\sqrt{a}\,x^2+\sqrt{b}\,x-\sqrt{c}=0$?

5. В треугольнике ABC со сторонами AB = 5, BC = $\sqrt{17}$ и AC = 4 на стороне AC взята точка M так, что CM = 1. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и BCM.

6. В школьной викторине участвовали 100 учеников. После подведения итогов оказалось, что любые 66 из них вместе заработали не менее 50% от общего количества призовых очков. Какой наибольший процент очков мог заработать один участник викторины?

МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

Материалы для членов жюри (ключи, критерии оценивания)

1. Буратино вышел из дома папы Карло и пришёл на Поле Чудес ровно в 22:00. Если бы скорость, с которой он шёл, была на 25% больше, то он пришёл бы в 21:30. В какое время он вышел из дома?

Ответ: в 19:30.

Решение: Если Буратино потратил t (ч) на свой путь, то с увеличенной скоростью он потратил бы в 1,25 меньше, т.е. $\frac{4}{5}t$. Значит, он сэкономил бы $\frac{1}{5}t$, что составило бы 30 мин. Следовательно, на дорогу до Поля Чудес он потратил 2,5 часа, а вышел из дома в 19:30.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

2. Трехзначное число, все цифры которого различны, назовем *сбалансированным*, если оно равно сумме всевозможных двузначных чисел, составленных из различных цифр этого числа. Приведите пример какого-нибудь сбалансированного числа. Ответ обоснуйте.

Решение: Например, число 132 = 13+12+32+21+31+23 является сбалансированным (есть и другие варианты).

Критерии проверки: Любое подходящее число с проверкой – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

3. На турнире каждый участник должен был сыграть с каждым из оставшихся ровно по одной партии, но двое участников выбыли по ходу турнира, сыграв только по 4 партии. В итоге количество всех сыгранных партий оказалось равным 62. Сколько всего было участников?

Ответ: 13.

Решение: Пусть всего было n участников. Тогда, не считая двоих выбывших, между остальными участниками состоялось $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партий. Если эти двое успели сыграть между собой, то с их участием было сыграно 7 партий, а если не успели, то 8 партий. Таким образом, имеем два случая $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+8=62$ или $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+7=62$. Решая эти уравнения, находим, что первое не имеет целых корней, а второе имеет один положительный целый корень $n=13$.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**. Ход решения верный, но неверный ответ из-за арифметической ошибки – **5 баллов**. Замечено наличие двух случаев, но второй не доведен до конца, получен правильный ответ – **4 балла**. При переборном решении учтены не все случаи, получен верный ответ – **3 балла**. Только верный ответ с обоснованием, что он подходит – **2 балла**. Решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

4. Существуют ли положительные числа *a, b, c* такие, что числа d и $\sqrt{d}$ являются соответственно корнями уравнений $ax^2+bx-c=0$ и $\sqrt{a}\,x^2+\sqrt{b}\,x-\sqrt{c}=0$?

Ответ: нет.

Решение: Пусть такие числа существуют, подставим в уравнения вместо x значения d и $\sqrt{d}$ соответственно. Тогда имеем $c=ad^2+bd$ и $\sqrt{c}=\sqrt{a}d+\sqrt{b}\sqrt{d}$. В последнем равенстве обе части положительны, возведем их в квадрат: $c=\left(\sqrt{a}d+\sqrt{b}\sqrt{d}\right)^2=ad^2+2d\sqrt{abd}+bd=ad^2+bd$. Значит $2d\sqrt{abd}=0$, а так как a и b не равны 0, то $d=0$. Но, тогда и число c будет равно 0, а это противоречит условию задачи.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, получено равенство $d=0$, но этот случай не исключен – **2 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

5. В треугольнике ABC со сторонами AB = 5, BC = $\sqrt{17}$ и AC = 4 на стороне AC взята точка M так, что CM = 1. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и BCM.

Ответ: 2.

Решение: Проведем высоту BH на сторону AC. Пусть CH = x, тогда BH = 4 – x. По теореме Пифагора из двух треугольников имеем $BH^2=BC^2-CH^2=17-x^2$ и $BH^2=AB^2-AH^2=25-(4-x)^2$. Приравняв правые части обоих равенств, получим $x=1$, а значит точки M и H совпадают. Тогда треугольники ABM и BCM – прямоугольные, центры описанных окружностей лежат на серединах гипотенуз AB и BC. Расстояние между центрами равно длине средней линии, параллельной стороне AC, т.е. равно 2.

МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

6. В школьной викторине участвовали 100 учеников. После подведения итогов оказалось, что любые 66 из них вместе заработали не менее 50% от общего количества призовых очков. Какой наибольший процент очков мог заработать один участник викторины?

Ответ: 25%.

Решение: Допустим участник X набрал наибольший процент очков – $x\%$. Разобьем остальных участников на три группы A, B и C по 33 человека. Пусть в этих группах суммарно участники набрали соответственно a, b и c процентов очков. Тогда

$$2(100-x)=2(a+b+c)=(a+b)+(a+c)+(b+c)\geq 50+50+50=150.$$

Следовательно, $x\leq 25$.

Приведем пример, при котором максимальный процент будет равен 25. Если бы каждый из участников, кроме X, заработал $\frac{75}{99}=\frac{25}{33}\%$ всех очков, то любые 66 из них суммарно набрали бы 50%, а сам X – 25% всех очков.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, только доказана оценка «не более 25%» – **4 балла**, только приведен подходящий пример – **3 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.