10 класс

1. Даны различные действительные числа p и q. Известно, что можно подобрать такое число x, что будут выполнены равенства $x^2+px+q=0$ и $x^2+qx+p=0$. Какие значения может принимать сумма $p+q$?

   Решение. Пусть x таково, что оба равенства из условия задачи выполнены. Тогда $x^2+px+q=x^2+qx+p$, откуда $(p-q)x=p-q$. Так как $p\neq q$, отсюда следует, что $x=1$. Подставляя это значение в любое из уравнений, находим, что $p+q+1=0$, то есть, $p+q=-1$. **Ответ:** -1.

2. Найдите четыре таких числа, что все их попарные суммы являются последовательными натуральными числами, меньшее из которых равно 2023.

   Решение. Заметим, что попарные суммы чисел 1, 3, 5 и 9 дают шесть последовательных четных чисел от 4 до 14. Тогда попарные суммы чисел $n+1$,$n+3$,$n+5$,$n+9$ тоже образуют шесть последовательных четных чисел от $2n+4$ до $2n+14$. Уменьшив их в 2 раза, получим шесть последовательных натуральных чисел. Значит, подходит четверка чисел $\dfrac{n+1}{2}$, $\dfrac{n+3}{2}$, $\dfrac{n+5}{2}$, $\dfrac{n+9}{2}$. При этом $\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{n+3}{2}=2023$, то есть $n=2021$, и получим четверку 1011, 1012, 1013, 1015. **Ответ:** 1011, 1012, 1013, 1015.

   Комментарий. Без каких-либо объяснений приведен верный пример – 7 баллов.

3. В футбольном турнире играли семь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие тринадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

   Решение. Оценка. Заметим, что всего игр будет $\frac{7\cdot 6}{2}=21$. Тогда суммарное количество очков не превосходит $21\cdot 3=63$. А это значит, что выйти в следующий круг могут не более $\left[\frac{63}{13}\right]=4$ команд.

   Пример. Покажем, что 4 команды могут выйти в следующий круг. Для этого приведем пример подходящей турнирной таблицы (символом «х» обозначены несущественные результаты):

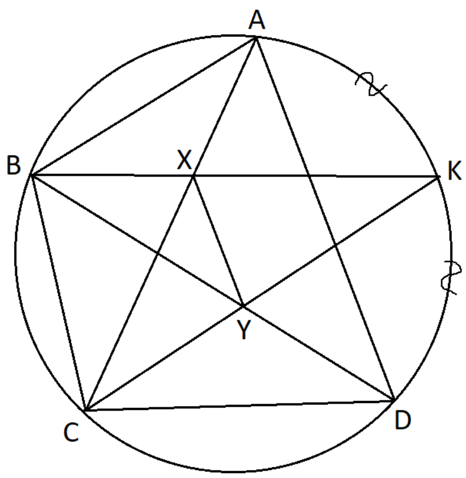
№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	-	1	3	3	3	3	0
2	1	-	0	3	3	3	3
3	0	3	-	3	3	3	1
4	0	0	0	-	x	x	0
5	0	0	0	x	-	x	0
6	0	0	0	x	x	-	0
7	3	0	1	3	3	3	-

Ответ: 4.

Комментарий. Получена верная оценка – не более 3-х баллов.

4. Четырёхугольник $ABCD$ – вписанный, точка K – середина той дуги AD, где нет других вершин четырёхугольника. Пусть X и Y – точки пересечения прямых BK и CK с диагоналями. Докажите, что прямая XY параллельна AD.

   Решение. Так как K - середина дуги AD, то дуги AK и KD равны. Поскольку дуги AK и KD равны, то вписанные углы KBD и ACK равны, а значит равны углы XBY и XCY. Так как отрезок XY виден под одним и тем же углом из точек B и C, то четырехугольник $BCYX$ является вписанным, а значит $\angle BCX = \angle BYX$. Так как четырехугольник $ABCD$ - вписанный, то $\angle BCA = \angle BDA \Rightarrow \angle BCX = \angle BDA$. Итак, учитывая вышесказанное, получаем $\angle BCX = \angle BYX = \angle BCA = \angle BDA$, а значит $\angle BYX = \angle BDA \Rightarrow XY \parallel AD$.



5. Положительные вещественные числа a, b, x, y удовлетворяют условиям $ax \leqslant 5$, $ay \leqslant 10$, $bx \leqslant 10$, $by \leqslant 10$. Следует ли отсюда, что

$$ax + ay + bx + by \leqslant 30\,?$$

Решение. Да, следует. Обобщим условие. Пусть $ax \leqslant p$, $ay \leqslant q$, $bx \leqslant q$, $by \leqslant q$. Докажем, что тогда $ax + ay + bx + by \leqslant 2(p + q)$. Из условия следует, что $ax + by \leqslant p + q$. Рассмотрим сумму остальных слагаемых $ay + bx = ax + bx + a(y - x) + b(x - y) = ax + bx + (a - b)(y - x)$ (*). Докажем, что $(a - b)(y - x) \leqslant 0$. Если $b \leqslant a$, то $bx \leqslant ax \leqslant p$ и сразу получаем требуемую оценку для задачи. Аналогично, если $y \leqslant x$, то $ay \leqslant ax \leqslant p$ и также получаем необходимую оценку. В противном случае, $(a - b) \leqslant 0$, $(y - x) \geqslant 0$ и значит $(a - b)(y - x) \leqslant 0$. Тогда выражение (*), можно оценить $ax + bx + (a - b)(y - x) \leqslant ax + bx \leqslant p + q$. То есть $ax + ay + bx + by \leqslant 2(p + q)$.