10 класс

1. Найдите наименьшее 10-значное число, у которого сумма цифр больше, чем у любого меньшего его числа.

Ответ: 1 999 999 999.

Решение. Среди 9-значных чисел сумма цифр наибольшая у числа 999 999 999, она равна 81. Поскольку искомое 10-значное число больше 999 999 999, мы должны подобрать наименьшее число с суммой цифр не меньше, чем 82. Если первая цифра этого числа 1, то сумма остальных цифр не меньше 81, и значит, девять остальных цифр — это девятки.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 1 балл. Доказано, что сумма цифр искомого числа больше 81 — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель половину партий выиграл, половину — сыграл вничью. Оказалось, что он набрал очков в 9 раз меньше, чем все остальные вместе взятые. (За победу — 1 очко, за ничью — 0,5, за поражение — 0.) Сколько было шахматистов в турнире?

Ответ: 15 *шахматистов.*

Решение. Если количество участников n, то каждый сыграл $n-1$ партий. Половину партий победитель выиграл и набрал $\frac{1}{2}(n-1)$ очков. Половину партий он сыграл вничью и набрал ещё $\frac{1}{4}(n-1)$ очков. Всего победитель набрал $\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{4}(n-1)=\frac{3}{4}(n-1)$ очков.

В турнире было сыграно $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. В каждой партии игроки разыграли одно очко, поэтому в сумме набрали соответственно $\frac{1}{2}n(n-1)$ очков. Значит,

$$9\cdot\frac{3(n-1)}{4}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{3(n-1)}{4},$$

откуда $n=15$. Итак, в турнире из 15 шахматистов победитель сыграл 14 партий и набрал $7+3,5=10,5$ очка, остальные набрали $\frac{1}{2}\cdot 15(15-1)-10,5=94,5$ очка, то есть в 9 раз больше, чем у победителя.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что при $n=15$ турнир удовлетворяет условию, но не обосновано, что других решений нет — 2 балла. Правильно составлено уравнение для числа участников — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Докажите, что любое нечётное составное число можно представить в виде суммы трёх или более последовательных нечётных положительных слагаемых. Сколько существует таких способов для числа 2021?

Ответ: *ровно один способ,* $2021=5+7+9+\ldots+89$.

Решение. Пусть $n=a\cdot b$ — составное число, и $1<a\leqslant b<n$. Попробуем представить n в виде суммы из m последовательных нечётных слагаемых:

$$n=(2k+1)+(2k+3)+\ldots+(2k+2m-1)=m\cdot(2k+m).$$

Поскольку $n=a\cdot b$, одно из решений уравнения $a\cdot b=m\cdot(2k+m)$ имеет вид $a=m$, $b=2k+m$, и тогда $n=(b-a+1)+(b-a+3)+\ldots+(b+a-1)$.

В частности, для числа $2021=43\cdot 47$ есть только одно решение уравнения $43\cdot 47=m(2k+m)$, а именно, $m=43$, $2k+m=47$, а значит, и единственный способ записи в виде суммы последовательных нечётных слагаемых: $2021=5+7+9+\ldots+89$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Верный пример для числа 2021 — 1 балл. Доказано, что других способов нет — ещё 1 балл. Разобран общий случай — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. Пусть x, y и z — действительные числа. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения $f = \cos x \sin y + \cos y \sin z + \cos z \sin x$.

Ответ: $\max f = \frac{3}{2}$, $\min f = -\frac{3}{2}$.

Решение. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения оценим выражение $|\,f\,|$, используя свойство абсолютной величины: модуль суммы нескольких чисел не превосходит суммы модулей этих чисел. Поэтому $|\,f\,| \leqslant |\cos x \sin y| + |\cos y \sin z| + |\cos z \sin x|$. Теперь оценим каждое слагаемое с помощью неравенства о средних $|\,ab\,| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2) \iff 0 \leqslant (|\,a\,| - |\,b\,|)^2$:

$$|\,f\,| \leqslant \tfrac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 y) + \tfrac{1}{2}(\cos^2 y + \sin^2 z) + \tfrac{1}{2}(\cos^2 z + \sin^2 x).$$

Правая часть неравенства равна $\frac{3}{2}$, поэтому $|\,f\,| \leqslant \frac{3}{2}$, то есть $-\frac{3}{2} \leqslant f \leqslant \frac{3}{2}$. Наибольшее значение $\frac{3}{2}$ достигается, например, при $x = y = z = \pi/4$, наименьшее значение $-\frac{3}{2}$ — при $x = y = z = -\pi/4$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Верно указан набор значений x, y, z, при которых $f = \frac{3}{2}$ или $f = -\frac{3}{2}$ — 1 балл. Доказано только одно неравенство $f \leqslant \frac{3}{2}$ (или $-\frac{3}{2} \leqslant f$), но не проверена достижимость значения $\frac{3}{2}$ (или $-\frac{3}{2}$) — 3 балла. Доказано только одно неравенство $f \leqslant \frac{3}{2}$ (или $-\frac{3}{2} \leqslant f$) и проверена достижимость значения $\frac{3}{2}$ (или $-\frac{3}{2}$) — 4 балла. Доказано неравенство $|\,f\,| \leqslant \frac{3}{2}$, но не проверена достижимость значений $\pm\frac{3}{2}$ — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

5. Сторона AB треугольника ABC больше стороны BC, а угол B равен 40°. На стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T. Найдите угол MPT.

Ответ: 20°.

Решение. (Рис. 3.) В четырехугольнике $APMT$ угол при вершине A измеряется половиной дуги TCB. Треугольники PMB и CMB равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle PMB = \angle CMB = \angle AMT$. Угол AMT измеряется полусуммой дуг AT и CB, причём:

$$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AT} + \overset{\frown}{CB}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{TC} + \overset{\frown}{CB}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{TCB}.$$

Значит, $\angle CMB = \angle BAT$. Таким образом, $\angle PMB = \angle BAT$ и $\angle BAT + \angle PMT = \angle BAT + (180^\circ - \angle PMB) = 180^\circ$. Следовательно, сумма противоположных углов четырехугольника $APMT$ равна 180°, и значит, $APMT$ — вписанный. По свойству вписанных углов $\angle MPT = \angle MAT = \angle CAT = \angle TBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 20^\circ$.

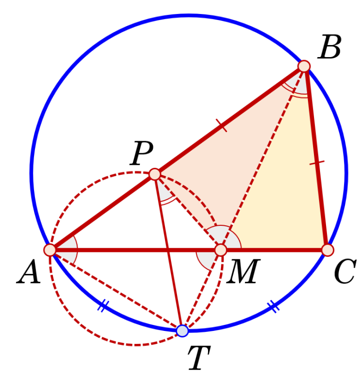

Рис. 3

Критерии. Отмечено равенство углов PMB и CMB (или AMT) — 1 балл. Доказано, что угол AMT или CMB равен углу BAT — 2 балла. Доказано, что четырёхугольник $APMT$ вписанный — 5 баллов. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.