Ключи к заданиям муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников 2022/23 учебного года по математике

Условия и решения задач

10.1. Сложили три различных двузначных числа $\overline{xx}$, $\overline{yy}$, $\overline{zz}$ и получили трёхзначное число $\overline{xyz}$. Найдите все возможные значения x, y, z. Запись $\overline{ab \dots c}$ означает число, в котором a – первая цифра, b – вторая цифра, c – последняя цифра.

Ответ. $x = 1,\ y = 9,\ z = 8$.

Решение. Запишем равенство в виде $11x + 11y + 11z = 100x + 10y + {}$ $+z$. Тогда $10z + y = 89x$. Если $x = 1$, то $10z + y = 89$, и так как z и y – цифры, то $z = 8$, $y = 9$. Если $x \geq 2$, то $10z + y \geq 178$, что невозможно, так как слева – двузначное число.

10.2. В левом нижнем углу шахматной доски 7×7 стоит король. За один ход он может передвинуться на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх. Либо на одну клетку по диагонали – вправо и вверх. Сколькими различными путями король может пройти в правый верхний угол доски, если ему запрещается посещение центральной клетки?

Ответ. 5020.

Решение. Составим таблицу 7×7, в каждой клетке которой напишем число, равное количеству допустимых путей, которыми король может дойти до этой клетки из нижнего левого угла. Сначала левый столбец и нижнюю строку заполняем единицами и в центральной клетке пишем 0 (по условию). Далее заполняем второй слева столбец и вторую снизу строку и т.д. по правилу: в очередной клетке ставим сумму чисел, стоящих в трёх соседних клетках снизу, слева и по диагонали (снизу слева). В результате получим таблицу

1	13	85	314	848	2078	5020
1	11	61	168	366	864	2078

1	9	41	66	132	366	848
1	7	25	0	66	168	314
1	5	13	25	41	61	85
1	3	5	7	9	11	13
1	1	1	1	1	1	1

Ответом служит число, стоящее в правом верхнем углу, 5020.

10.3. Уравнение $P(x) = 0$, где $P(x) = x^2 + bx + c$, имеет единственный корень, а уравнение $P(P(P(x))) = 0$, имеет ровно три различных корня. Решите уравнение $P(P(P(x))) = 0$.

Ответ. $1;\ 1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}$.

Решение. Из условия следует, что $P(x) = (x-\alpha)^2$. Уравнение $P(P(P(x))) = 0$ имеет вид

$$(((x-\alpha)^2-\alpha)^2-\alpha)^2 = 0.$$

Значит $((x-\alpha)^2-\alpha)^2 = \alpha$ и поэтому $\alpha > 0$. Из последнего равенства получаем, что $(x-\alpha)^2 = \alpha \pm \sqrt{\alpha}$. Так как два получившихся уравнения имеют в сумме ровно три решения, то одно имеет два решения, а другое – одно решение. Поэтому $\alpha - \sqrt{\alpha} = 0$, значит $\alpha = 1$. Откуда находим корни уравнения: $1;\ 1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}$.

10.4. На соревнованиях выступление спортсмена оценивают 7 судей, каждый из которых выставляет оценку в баллах (целое число от 0 до 10). Для получения итоговой оценки лучшая и худшая из оценок экспертов отбрасываются, и подсчитывается среднее арифметическое. Если бы средняя оценка подсчитывалась по всем семи оценкам, то спортсмены расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество спортсменов могло участвовать в соревновании?

Ответ. 5.

Решение. Допустим, что танцоров не меньше шести. Пусть A, a, S_A — соответственно лучшая оценка, худшая оценка и сумма всех неотброшенных оценок у победителя, а B, b, S_B — то же у последнего спортсмена. Вместо средних можно расставлять танцоров по сумме всех баллов или сумме всех, кроме крайних. Из условия следует, что такие суммы у всех различны и идут в противоположном порядке. Так как суммы целые, а танцоров не менее шести, должны выполняться неравенства

$$S_A - S_B \geq 5 \text{ и } (B + b + S_B) - (A + a + S_A) \geq 5.$$

Складывая эти неравенства, получим $B + b - A - a \geq 10$.

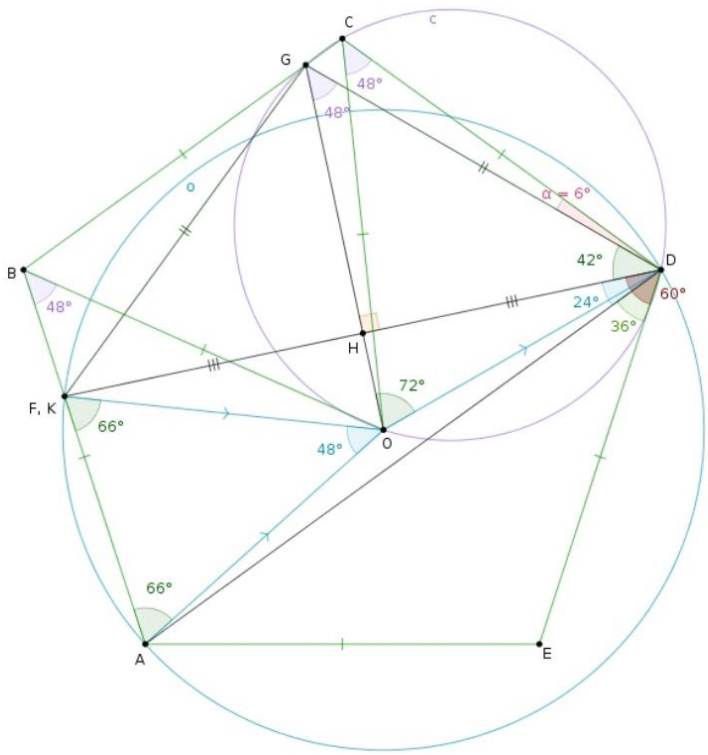
Отсюда $b \geq A + a + (10 - B) \geq A$, т. е. худшая оценка последнего не меньше лучшей оценки победителя. Но тогда у последнего каждая оценка не меньше, чем у победителя, т. е. $S_B \geq S_A$. Получили противоречие.

Пример выставления оценок спортсменам: 0-0-0-0-0-0-10, 0-0-0-0-0-1-8, 0-0-0-0-1-1-6, 0-0-0-1-1-1-4, 0-0-1-1-1-1-2.

Комментарий. пример – 3 балла, оценка – 4 балла.

10.5. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ на стороне AB отмечена точка F, а на стороне BC точка G так, что $FG = GD$. Найдите угол CDG, если угол FDE равен 60°.

Ответ: 6°.



Решение. Углы правильного пятиугольника равны по $108°$, $\angle EDA = 36°, \angle FDE = 60°.$ Значит $\angle ADF = 24°.$

Дополнительное построение: возьмем точку O так, что $BO = CO = BC.$ Тогда $\Delta BOC -$ равносторонний, $\angle ABO = OCD = 108° - 60° = 48°.$ Получим, что $\Delta ABO = \Delta OCD$, где $\angle BAO = \angle BOA = \angle COD = \angle CDO = 66°$, $AO = OD.$

Значит, существует окружность с центром в точке O и радиусом $r = OA = OD$. Пусть эта окружность пересекает сторону AB в точке K. Тогда

$\angle AKO = \angle KAO = 66°, \angle KOA = 48°$. Получаем, что $\angle ADK = ADF = 24°$. Значит, $K = F$. Тогда $\angle KAD = \angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = 72°,$ а $\angle AFD = 84°$, $\angle OFD = 18°$.

Пусть H – середина FD, тогда OH и GH – медианы, высоты и биссектрисы ΔFOD и ΔFGD соответственно (значит, $GO \perp FD$). Получаем $\angle FOH = \angle DOH = \angle DOG = 90° - 18° = 72°$.

$\angle GOD + GCD = 180°$ => $OGCD$ вписан в окружность => $\angle OCD = \angle OGD = 48° = \angle HGD$. Тогда $\angle GD\mathrm{H} = 90° - 48° = 42°$. Получим, что $\angle CDG = 108° - 60° - 42° = 6°$.

Комментарий. Доказано, что точка O, вершина равностороннего треугольника, построенного на отрезке BC, равноудалена от вершин A, F, D – 3 балла.