ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Муниципальный этап. Ответы и решения.

10 класс.

10.1. Ответ. 12, 24, 36, 48.
Решение. По условию $10b + bq = 3bq^2$, где $b \neq 0$ – первый член, q – знаменатель прогрессии. Отсюда $3q^2 - q - 10 = 0, q_1 = 2, q_2 = -\frac{5}{3}$, т. е. $q = 2$. Из неравенства $bq \leq 9$ следует, что $b = 1, 2, 3$ или 4.

10.2. Ответ. 4 082 419.
Решение. Обозначим 2019 = a, получаем: $\sqrt{2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 1} = \sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1} = \sqrt{y^2 + 2y + 1} = |y+1|$, где $y = a^2 + 3a$. Окончательно имеем $\sqrt{2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 1} = (2019^2 + 6057 + 1) = (2000 + 19)^2 + 6058 = 4000000 + 76000 + 361 + 6058 = 4082419$.

10.3. Ответ. 12
Решение. При перемещении вершины треугольника параллельно его основанию площадь треугольника не меняется, поэтому последовательно получаем равенство площадей треугольников ABC, A_1BC, A_1B_1C и, наконец, $A_1B_1C_1$. Таким образом, $B_1C_1 = \frac{2S}{A_1B_1} = 12$.

10.4. Ответ. (2, 5, 7) – единственная тройка с точностью до перестановок.
Решение. Из условия следует, что все числа p, q и r различны. Без ограничения общности $p > q > r$. Если все числа p, q, r нечетны, то их разности четны, но все эти разности не могут одновременно равняться 2.
Значит, $r = 2$, p и q нечетны, следовательно, $p - q = 2$. Тогда одно из чисел $(p - r)$ и $(q - r)$ должно делиться на 3, так как $q > 3$ (1 – не простое число), т.е. $p - 2 = 3$, что невозможно, или $q - 2 = 3$, отсюда $q = 5$, $p = 7$.

10.5. Ответ. Не могло.
Решение. Заметим, что противоположные грани кубиков разбиваются на пары: одна грань внутри большого куба, другая – снаружи, т.е. ровно половина клякс находится внутри куба, а другая половина – снаружи. Всего у нас $8 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + 3) = 96$ клякс, т.е. снаружи нарисовано 48 клякс. Однако число 48 не представляется в виде суммы шести последовательных натуральных чисел, поскольку такая сумма нечетна, так как содержит ровно три нечетных и три четных слагаемых.