Ключи. 10 класс. ВсОШ по математике. Муниципальный этап. 2022-2023 учебный год.

Принципы оценивания

1. *Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.*
2. *Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.*
3. *Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.*

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части— решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в критериях или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

10.1. ОТВЕТ: 4 прожектора.

Решение. Тремя прожекторами осветить всю площадку нельзя, так как в этом случае какой-то прожектор должен освещать 2 угла, а значит полностью освещать некоторую сторону. Но тогда он должен находится на окружности, описанной около квадрата, что невозможно. Четырёх прожекторов хватит. В самом деле, если разместить прожекторы в точках пересечения вписанной окружности с диагоналями квадрата, то каждый прожектор полностью осветит противолежащую ему четверть площадки.

Комментарий: без рисунка – 4 балла.

10.2. Решение. Предположим, что удалось провести турнир без неинтересных матчей. Тогда в первом туре участник с номером 1 играл с теннисистом, номер которого не более 31, поэтому наименьший номер среди теннисистов, прошедших во второй тур не более 31. Аналогично, наибольший номер среди этих участников не менее 482. К третьему туру эти числа будут 61 и 452, к четвертому – 91 и 422 и т.д. К последнему девятому туру останется два игрока: один с номером не более 241, второй с номером не менее 272. В этом случае финальный матч неинтересен, что противоречит предположению.

10.3. Ответ: $\sqrt{1,4}$

Решение. Рассмотрим данное неравенство как квадратное с переменной x, переписав его в виде $x^2 - (y + a)x + 2y^2 + ay + a^2 - 1 \leq 0$. Поскольку коэффициент при второй степени переменной положителен, квадратный трёхчлен в левой части неравенства может принимать неположительные значения в том и только том случае, если его дискриминант D_1 неотрицателен. Поскольку

$D_1 = (y + a)^2 - 4(2y^2 + ay + a^2 - 1)$,

после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим

$D_1 = -7y^2 - 2ay - 3a^2 + 4$.

Рассмотрим D_1 как квадратный трёхчлен относительно y. Поскольку коэффициент при второй степени этого трёхчлена отрицателен, принимать неотрицательные значения он может только в том случае, если его дискриминант D_2 неотрицателен (или, что то же, если $\frac{D_2}{4} \geq 0$). Так как $\frac{D_2}{4} = a^2 - (-7) \cdot (-3a^2 + 4)$, после упрощений приходим к неравенству $28 - 20a^2 \geq 0$, откуда $a^2 \leq 1{,}4$ и $|a| \leq \sqrt{1{,}4}$. Значит, $a \in [-\sqrt{1{,}4}; \sqrt{1{,}4}]$, и наибольшим возможным значением параметра a является $\sqrt{1{,}4}$.

10.4. ОТВЕТ: на вторую степень.

<u>Решение</u>. Любое целое число можно представить в виде $8n + k$, где $k, n \in Z$, $0 \leq k \leq 7$. В частности, $19 = 8r + 3$, $199 = 8m + 7$, где $r = 2$ и $m = 24$. Изучим остатки при делении на 8 чисел вида $(8r + 3)^S$ при различных натуральных s, т.е. выясним, чему равняется число k в представлении $(8r + 3)^S = 8n + k$, где $k, n \in Z$, и $0 \leq k \leq 7$. Замечаем, что при чётных s число $k = 1$, а при нечётных s число $k = 3$. Поэтому $19^{31} = (8r + 3)^{31} = 8n + 3$, где $n \in Z$. Далее $19^{93} - 199^3 = (8n+3)^3 - (8m+7)^3 = (8n-8m-4)[(8n+3)^2 + (8n+3)(8m+7) + (8m+7)^2]$. Выражение в квадратных скобках — нечётное число. Значит, $19^{93} - 199^3$ делится на 4, но не делится на 8.

10.5. <u>Решение.</u>

Пусть окружность радиуса R с центром O, вписанная в равнобедренную трапецию ABCD с основанием BC=18 и AD=50, касается боковой стороны AB в точке M, а оснований AD и BC – в точках K и L соответственно. Тогда BM=BL=1/2 BC = 9, AM=AК=1/2 AD = 25, AB=AM+BM=25+9=34.

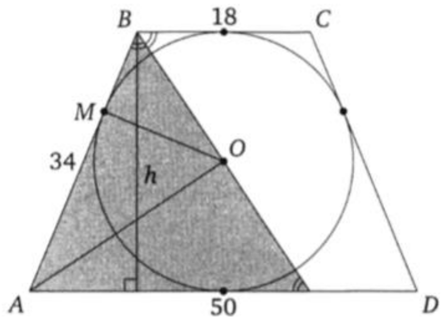

Рис.1

Отрезок OM – высота прямоугольного треугольника AOB, проведённая из вершины прямого угла AOB, поэтому $R = OM = \sqrt{AM \cdot BM} = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$.

Пусть прямая, о которой говорится в условии, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис.1).

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP – равнобедренный, AP=AB=34. Тогда $S_{\Delta ABP} = 2S_{\Delta OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OM = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 15 = 510$.

Если S – площадь трапеции ABCD, а h – её высота, то h=2R=30,

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2}(18 + 50) \cdot 30 = 34 \cdot 30 = 1020.$$

Следовательно, $\frac{S_\Delta}{S} = \frac{510}{1020} = \frac{1}{2}$.

Примечание: искомое отношение можно вычислить другим способом. Пусть K и L – точки касания вписанной в трапецию окружности с основаниями BC и AD соответственно. Тогда K и L – середины оснований, прямоугольные треугольники POL и BOK равны по катету и прилежащему острому углу, поэтому треугольник ABP равновелик прямоугольной трапеции ABLK. Следовательно $S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$).

Т.к. трапеция равнобедренная, то для прямой, проходящей через вершину C, получим тот же результат.

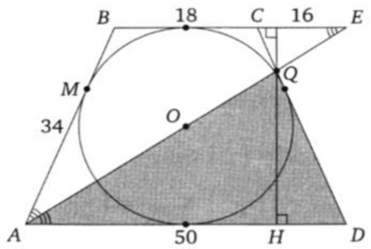

Рис.2

Рассмотрим второй случай. Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис.2), пересекает боковую сторону CD в точке Q, а продолжение основания BC – в точке E. Треугольник ABE – равнобедренный (∠AEB=∠DAE=∠BAE), поэтому BE=AB=34, CE=BE-BC=AB-BC=34-18=16.

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$, значит, если QH – высота треугольника AQD, то

$$QH = \frac{25}{33} h = \frac{25}{33} \cdot 30 = \frac{250}{11}, S_{\Delta AQD} = \frac{1}{2} AD \cdot QH = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot \frac{250}{11} = \frac{6250}{11}.$$

Тогда $\frac{S_{\Delta AQD}}{S} = \frac{\frac{6250}{11}}{1020} = \frac{625}{1122}$.

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D.

Комментарий: если рассмотрен один случай – 4 балла.