Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2022-2023 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 10 класс

$\boxed{\textbf{10.1}}$ *На конкурсе по бессмысленной деятельности участник записал по кругу 2022 ненулевых числа, причём оказалось, что модуль каждого числа совпадает с модулем суммы двух его соседей. А вы так сможете?*

Решение: Можно поставить по кругу повторяющиеся тройки чисел 1, 1, -2.

Критерии:

- Приведён правильный пример — 7 баллов.

$\boxed{\textbf{10.2}}$ *Про числа a и b известно, что система уравнений*

$$\begin{cases} y^2 = x^2 + ax + b \\ x^2 = y^2 + ay + b \end{cases}$$

не имеет решений. Найдите a.

Решение: Так как система не имеет решений, то, в частности, нет решений с $x = y$. При $x = y$ оба уравнения системы равносильны уравнению $ax + b = 0$. Это линейное уравнение не имеет корней только в том случае, когда его угловой коэффициент a нулевой.

Критерии:

- За отсутствие примера системы с $a = 0$, не имеющей решений, баллы не снижаются.

$\boxed{\textbf{10.3}}$ *На доске нарисовали остроугольный $\triangle ABC$, отметили основания высот A_1, B_1 и C_1. Затем весь чертёж стёрли, кроме точек A_1, B_1 и C_1. Можно ли восстановить исходный $\triangle ABC$ с помощью циркуля и линейки?*

Решение: Углы $\angle AA_1B$ и $\angle BB_1A$ равны, поэтому четырёхугольник AB_1A_1B вписанный, $\angle B_1A_1C = \angle A$. Аналогично $\angle C_1A_1B = \angle A$. Значит, стороны треугольника ABC являются внешними биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$. Это построение можно выполнить циркулем и линейкой.

Критерии:

- Утверждение “высоты $\triangle ABC$ являются биссектрисами $\triangle A_1B_1C_1$” принимается без доказательства.

$\boxed{\textbf{10.4}}$ *Другой участник конкурса бессмысленной деятельности отметил в клетчатом прямоугольнике размером $(N-1) \times (N+1)$ центры 13 клеток так, что расстояние между любыми двумя отмеченными точками больше 2. Какое наименьшее значение может принимать N?*

Решение: Покажем, что в прямоугольнике 6×8 (а тогда и любого меньшего размера) так отметить клетки нельзя. Действительно, разобьём прямоугольник на квадратики 2×2. В каждом из них попарные расстояния между центрами клеток не превосходят $\sqrt{2}$, поэтому из четырёх клеток отмечено не более одной. Но тогда всего отмеченных клеток не более 12.

Пример для прямоугольника 7×9:

			X					X
	X					X		
				X				
		X					X	
X					X			
			X					X
	X					X		

Критерии:

- Доказано только, что $N > 7$ — 3 балла;
- Приведён только пример на $N = 8$ — 3 балла;
- За отсутствие обоснования у примера баллы не снижаются.

10.5 *Найдутся ли три таких иррациональных числа, что их сумма – целое число и сумма обратных величин тоже целая?*

Решение 1: Рассмотрим многочлен $f(x) = x^3 - 30x^2 + 31x - 1$. Поскольку $f(0) < 0, f(1) > 0, f(2) < 0, f(100) > 0$, уравнение $f(x) = 0$ имеет три вещественных корня x_1, x_2, x_3. Числа ± 1 не являются корнями, поэтому все корни уравнения иррациональны. При этом по теореме Виета их сумма равна 30, а сумма обратных равна $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = 31$.

Решение 2: Пусть $c = \sqrt{2}+1$. Заметим, что функция $h(a) = a + \frac{1}{a}$ непрерывна и неограничена на $(0, \infty)$, поэтому уравнение $h(a) + c = N$ имеет решение при достаточно большом натуральном N. Поскольку при рациональных a значение $h(a)$ рационально, а $h(a) + c$ иррационально, соответствующее решение a_0 иррационально. Итак, в тройке $a_0, \frac{1}{a_0}, c$ все числа иррациональны, а их сумма равна N. При этом сумма обратных к ним равна $\frac{1}{a_0} + a_0 + \frac{1}{c} = h(a_0) + c - 2 = N - 2$.

Критерии:

- Неочевидна иррациональность приведённых чисел и/или целостность их суммы и суммы обратных — снимается до 3 баллов;
- Числа приводятся как корни многочлена, но не проверяется, что этот многочлен имеет три иррациональных корня — не более 3 баллов;
- Утверждение “корень целой степени из целого числа — число либо целое, либо иррациональное” и следствия из него принимаются без доказательства.