10 класс

10-1-1. Выберите числа, которые являются контрпримерами к данному утверждению: «Если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27».

а) 81; б) 999; в) 9918; г) 18.

Ответ. только 9918.

Решение варианта 1. Утверждения про 81 и 18 точно не являются контрпримерами, так как для них не выполнен посыл «если сумма цифр натурального числа делится на 27».

Утверждение про 999 не является контрпримером, поскольку не противоречит нашему утверждению.

Наконец, число 9918 является контрпримером, поскольку для него выполнено, что сумма цифр делится на 27, но само число $9918 = 9 \cdot 1102$ не делится на 27.

10-1-2. Выберите числа, которые являются контрпримерами к данному утверждению: «Если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27».

а) 81; б) 999; в) 9918; г) 18.

Ответ. только 81.

10-1-3. Выберите числа, которые являются контрпримерами к данному утверждению: «Если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27».

а) 54; б) 999; в) 2799; г) 36.

Ответ. только 2799.

10-1-4. Выберите числа, которые являются контрпримерами к данному утверждению: «Если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27».

а) 54; б) 999; в) 2799; г) 36.

Ответ. только 54.

10-2-1. Петя выписывает ряд чисел: если текущее число равно x, то следующее равно $\dfrac{1}{1-x}$. Первое число в ряду равно 2. Чему равно пятисотое число?

Ответ. -1.

Решение варианта 1. Выпишем несколько первых членов получаемой последовательности:

$$2, -1, 1/2, 2, \ldots .$$

Видим, что последовательность зациклилась с периодом 3. Так как число 500 при делении на 3 даёт остаток 2, то 500-й член будет такой же, как 2-й. То есть пятисотое число будет равно -1.

10-2-2. Петя выписывает ряд чисел: если текущее число равно x, то следующее равно $\frac{1}{1-x}$. Первое число в ряду равно -1. Чему равно трёхсотое число?

Ответ. 2.

10-2-3. Петя выписывает ряд чисел: если текущее число равно x, то следующее равно $1-\frac{1}{x}$. Первое число в ряду равно 3. Чему равно шестисотое число?

Ответ. $-1/2$.

10-2-4. Петя выписывает ряд чисел: если текущее число равно x, то следующее равно $1-\frac{1}{x}$. Первое число в ряду равно 2. Чему равно двухсотое число?

Ответ. $1/2$.

10-3-1. Целые неотрицательные числа a, b, c, d таковы, что

$$ab + bc + cd + da = 707.$$

Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b + c + d$?

Ответ. 108.

Решение варианта 1. Данное равенство можно переписать в виде

$$(a + c)(b + d) = 7 \cdot 101,$$

где числа 7 и 101 — простые. Поэтому или одно из выражений в скобках равно 1, а другое — 707, или же одно из выражений в скобках равно 7, а другое — 101. В первом случае $a + b + c + d$ равно 708, во втором — 108, и 108 — меньшее из этих двух чисел.

Комментарий. Из решения вытекает, что данное в условии равенство на самом деле возможно. Можно взять любые целые неотрицательные числа с условиями $a + c = 7$, $b + d = 101$. Например, $a = 1, c = 6, b = 1, d = 100$.

10-3-2. Целые неотрицательные числа a, b, c, d таковы, что

$$ab + bc + cd + da = 505.$$

Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b + c + d$?

Ответ. 106.

10-3-3. Целые неотрицательные числа a, b, c, d таковы, что

$$ab + bc + cd + da = 303.$$

Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b + c + d$?

Ответ. 104.

10-3-4. Целые неотрицательные числа a, b, c, d таковы, что

$$ab + bc + cd + da = 1111.$$

Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b + c + d$?

Ответ. 112.

10-4-1. Аня и Боря играют в камень-ножницы-бумага. В этой игре каждый игрок выбирает одну из фигур: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. Если игроки выбирают одинаковые фигуры, то партия заканчивается ничьёй.

Аня и Боря провели 25 партий. Аня выбирала камень 12 раз, ножницы — 6 раз, бумагу — 7 раз. Боря выбирал камень 13 раз, ножницы — 9 раз, бумагу — 3 раза. Ни в одной партии не было ничьей. Сколько раз могла выиграть Аня? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 16.

Решение варианта 1. Заметим, что, поскольку ничьих не было, когда Аня выбирала камень, Боря должен был выбрать ножницы или бумагу. Аня выбирала камень 12 раз. Боря выбирал ножницы или бумагу суммарно тоже $9 + 3 = 12$ раз. Значит, все эти случаи пришлись на партии, в которых Аня выбирала камень.

Значит, во всех остальных 13 партиях (когда Аня выбирала ножницы или бумагу), Боря выбирал камень.

Из партий, когда Аня выбирала камень, она выиграла 9 раз: когда Боря выбирал ножницы. Из партий, когда Боря выбирал камень, Аня выиграла 7 раз: когда выбирала бумагу. Итак, Аня выиграла 16 раз.

10-4-2. Аня и Боря играют в камень-ножницы-бумага. В этой игре каждый игрок выбирает одну из фигур: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. Если игроки выбирают одинаковые фигуры, то партия заканчивается ничьёй.

Аня и Боря провели 36 партий. Аня выбирала камень 6 раз, ножницы — 5 раз, бумагу — 25 раз. Боря выбирал камень 2 раза, ножницы — 31 раз, бумагу — 3 раза. Ни в одной партии не было ничьей. Сколько раз могла выиграть Аня? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 9.

10-4-3. Аня и Боря играют в камень-ножницы-бумага. В этой игре каждый игрок выбирает одну из фигур: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. Если игроки выбирают одинаковые фигуры, то партия заканчивается ничьёй.

Аня и Боря провели 32 партии. Аня выбирала камень 19 раз, ножницы — 5 раз, бумагу — 8 раз. Боря выбирал камень 2 раза, ножницы — 6 раз, бумагу — 24 раза. Ни в одной партии не было ничьей. Сколько раз мог выиграть Боря? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 25.

10-4-4. Аня и Боря играют в камень-ножницы-бумага. В этой игре каждый игрок выбирает одну из фигур: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. Если игроки выбирают одинаковые фигуры, то партия заканчивается ничьёй.

Аня и Боря провели 20 партий. Аня выбирала камень 13 раз, ножницы — 3 раза, бумагу — 4 раза. Боря выбирал камень 7 раз, ножницы — 9 раз, бумагу — 4 раза. Ни в одной партии не было ничьей. Сколько раз мог выиграть Боря? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 7.

10-5-1. Среди n углов выпуклого n-угольника $n-1$ угол равен 150°, а оставшийся — меньше 150°. Для каких n это возможно? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 8, 9, 10, 11.

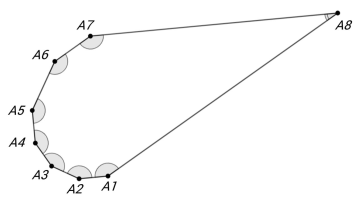
Решение варианта 1. Пусть оставшийся угол равен x°. Воспользовавшись тем, что сумма углов n-угольника равна $180^\circ(n-2)$, получаем

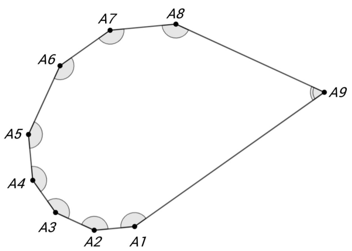
$$150(n-1)+x=180(n-2),$$

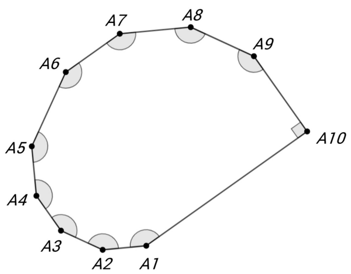
$$n=\frac{x+120}{30}.$$

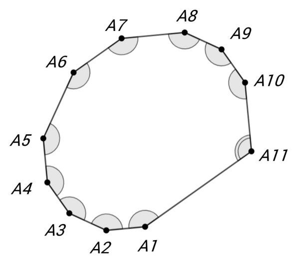
Так как $9<x<150$, то $7<n<12$, то есть n может равняться только 8, 9, 10, 11.

Для полноты решения нужно ещё привести примеры, показывающие, что все полученные 4 ситуации действительно возможны. Эти примеры приведены на рисунках ниже.









10-5-2. Среди n углов выпуклого n-угольника $n-1$ угол равен $140°$, а оставшийся — меньше $140°$. Для каких n это возможно? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 6, 7, 8.

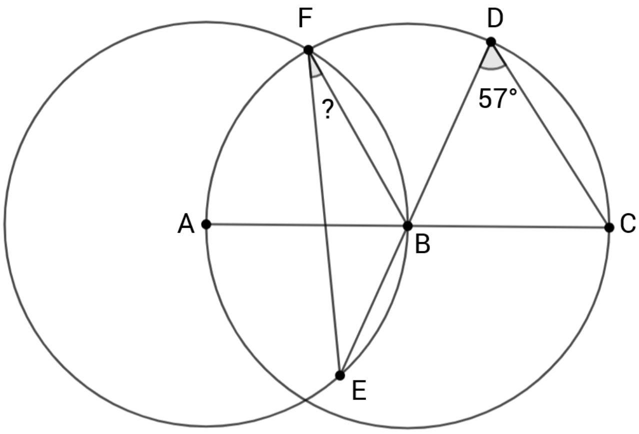
10-5-3. Среди n углов выпуклого n-угольника $n-1$ угол равен $160°$, а оставшийся угол — острый. Для каких n это возможно? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 11, 12, 13, 14.

10-5-4. Среди n углов выпуклого n-угольника $n-1$ угол равен $145°$, а оставшийся — меньше $145°$. Для каких n это возможно? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 7, 8, 9, 10.

10-6-1. На рисунке две окружности с центрами A и B. Кроме того, точки A, B и C лежат на одной прямой, точки D, B и E также лежат на одной прямой. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



Ответ. $24°$.

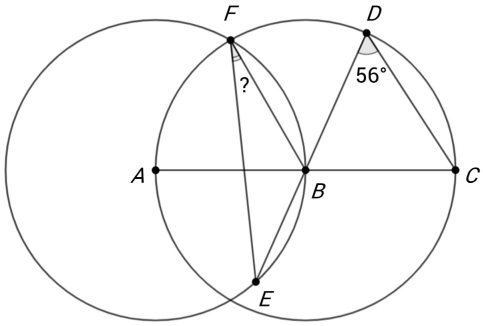
Решение варианта 1. Вписанный угол BFE в два раза меньше центрального угла BAE, поэтому будем искать угол BAE. Этот угол можно найти из равнобедренного треугольника BAE ($AB = AE$ как радиусы окружности). Углы ABE и DBC равны как вертикальные. Заметим, что треугольник DBC равнобедренный — BD и BC равны как радиусы. Итак:

$$\angle ABE = \angle DBC = 180° - 57° - 57° = 66°,$$

$$\angle BAE = 180° - 66° - 66° = 48°,$$

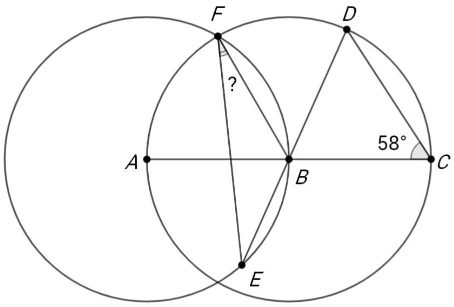
$$\angle BFE = \frac{1}{2}\angle BAE = \frac{1}{2} \cdot 48° = 24°.$$

10-6-2. На рисунке две окружности с центрами A и B. Кроме того, точки A, B и C лежат на одной прямой, точки D, B и E также лежат на одной прямой. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



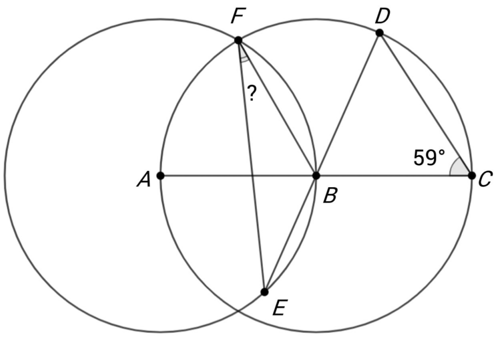
Ответ. 22°.

10-6-3. На рисунке две окружности с центрами A и B. Кроме того, точки A, B и C лежат на одной прямой, точки D, B и E также лежат на одной прямой. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



Ответ. 26°.

10-6-4. На рисунке две окружности с центрами A и B. Кроме того, точки A, B и C лежат на одной прямой, точки D, B и E также лежат на одной прямой. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



Ответ. 28°.

10-7-1. За большим круглым столом лицом к центру стола пируют 90 человек: 40 баронов, 30 графов и 20 маркизов. По сигналу должны встать ровно те, у кого оба соседа — левый и правый — имеют одинаковый титул. Какое наибольшее количество людей может встать?

Например, чтобы встал граф, оба его соседа должны иметь одинаковый титул, но не обязательно графский.

Ответ. 86.

Решение варианта 1. Попросим половину пирующих, стоящих через одного, сделать шаг вперёд. Тогда все люди поделятся на два круга: внутренний и внешний. Заметим, что у человека во внутреннем круге оба соседа находятся во внешнем, при том являются там соседями. Аналогично для человека во внешнем круге.

Итак, нам достаточно найти наибольшее количество соседей одинакового титула в двух новых кругах. Поскольку в каждом из двух новых кругов по 45 человек, ни один из них не может быть целиком состоять из дворян одного титула. Значит, в каждом круге есть хотя бы две пары соседей разного титула (ровно одной быть не может). Значит, суммарно в обоих кругах как минимум 4 пары соседей разного титула. Итого, из 90 пирующих 4 точно не встанут.

В рассуждении выше мы доказали, что больше 86 пирующих встать не могут. Но существует ли ситуация, в которой встанут ровно 86? Да, и пример такой ситуации легко построить из нашего рассуждения: поставим во внешний круг подряд 40 баронов и подряд 5 графов, а во внутренний — 25 графов подряд и 20 маркизов подряд. Тогда у нас будет ровно 4 пары соседей разного титула. Вообще, подходит любой пример, когда в каждом круге два типа людей, причём люди одного типа идут подряд, и другого типа тоже идут подряд.

10-7-2. За большим круглым столом лицом к центру стола пируют 110 человек: 50 баронов, 40 графов и 20 маркизов. По сигналу должны встать ровно те, у кого оба соседа — левый и правый — имеют одинаковый титул. Какое наибольшее количество людей может встать?

Например, чтобы встал граф, оба его соседа должны иметь одинаковый титул, но не обязательно графский.

Ответ. 106.

10-7-3. За большим круглым столом лицом к центру стола пируют 55 человек: 25 баронов, 20 графов и 10 маркизов. По сигналу должны встать ровно те, у кого оба соседа — левый и правый — имеют одинаковый титул. Какое наибольшее количество людей может встать?

Например, чтобы встал граф, оба его соседа должны иметь одинаковый титул, но не обязательно графский.

Ответ. 52.

Решение варианта 3. Будем ставить людей в новый круг через одного: $1, 3, 5, 7, \ldots, 55, 2, 4, 6, \ldots, 54$, снова 1. Нам достаточно найти наибольшее количество соседей одинакового титула в новом круге.

Ясно, что соседи разного титула в новом круге есть. Так же ясно, количество соседств разного титула в новом круге не может равняться 1. Двум оно тоже равнятся не может (тогда новый круг был бы устроен так: пирующие одного титула, затем пирующие другого титула. А где тогда третий титул?). А трём оно может равняться: например, сначала все бароны, потом все графы, потом все маркизы.

Итак, мы показали, что из 55 пирующих как минимум трое не встанут, и построили пример, как только трое могут не встать. Тем самым ответ в задаче 52.

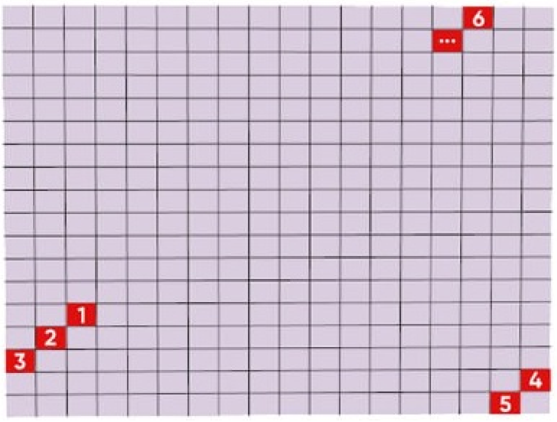
10-7-4. За большим круглым столом лицом к центру стола пируют 95 человек: 45 баронов, 30 графов и 20 маркизов. По сигналу должны встать ровно те, у кого оба соседа — левый и правый — имеют одинаковый титул. Какое наибольшее количество людей может встать?

Например, чтобы встал граф, оба его соседа должны иметь одинаковый титул, но не обязательно графский.

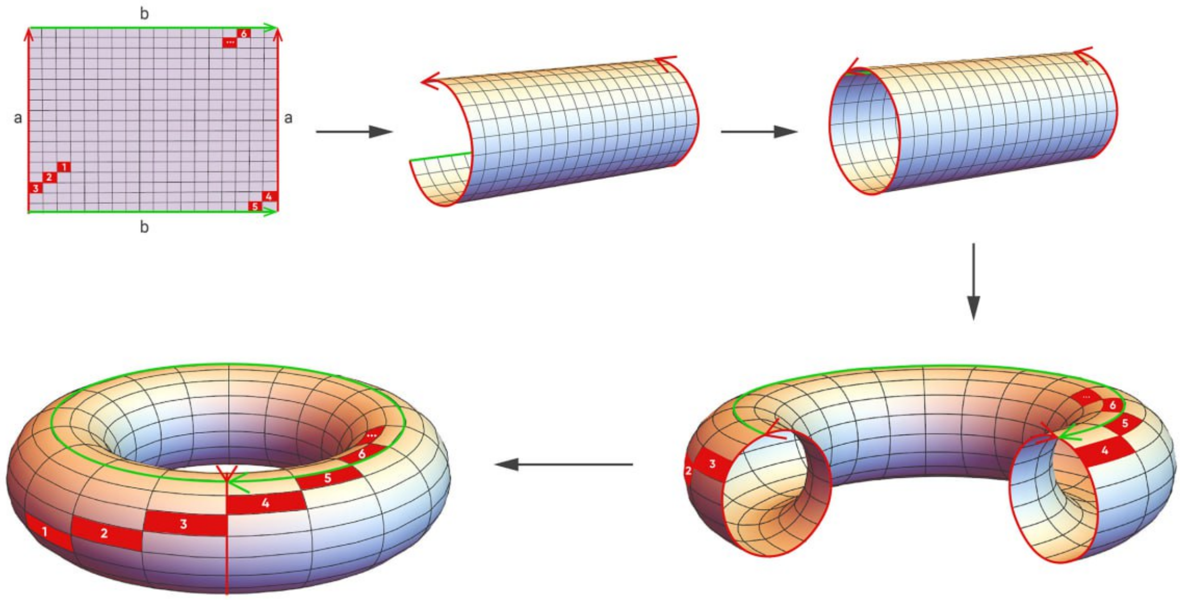
Ответ. 92.

10-8-1. Есть магический клетчатый лист бумаги размера 2000×70, изначально все клетки серые. Маляр встаёт на некоторую клетку и красит её в красный цвет. Каждую секунду маляр делает два шага: на одну клетку влево и на одну клетку вниз, и закрашивает красным цветом ту клетку, на которой он оказался после двух шагов. Если маляр стоит в самом левом столбце и должен сделать шаг влево, то он этим шагом телепортируется в самую правую клетку той же строки; если маляр стоит в нижней строке и должен сделать шаг вниз, то он этим шагом телепортируется в верхнюю клетку того же столбца. Через несколько ходов маляр вернулся на клетку, с которой начинал. Сколько в этот момент красных клеток на листе?

На рисунке приведен пример ходов маляра: сначала маляр в клетке 1, потом в клетке 2 и т.п.



Комментарий. Приведём другую, эквивалентную, формулировку этой задачи. Из клетчатого листа бумаги 2000×70 склеивается тор, как показано на картинке.

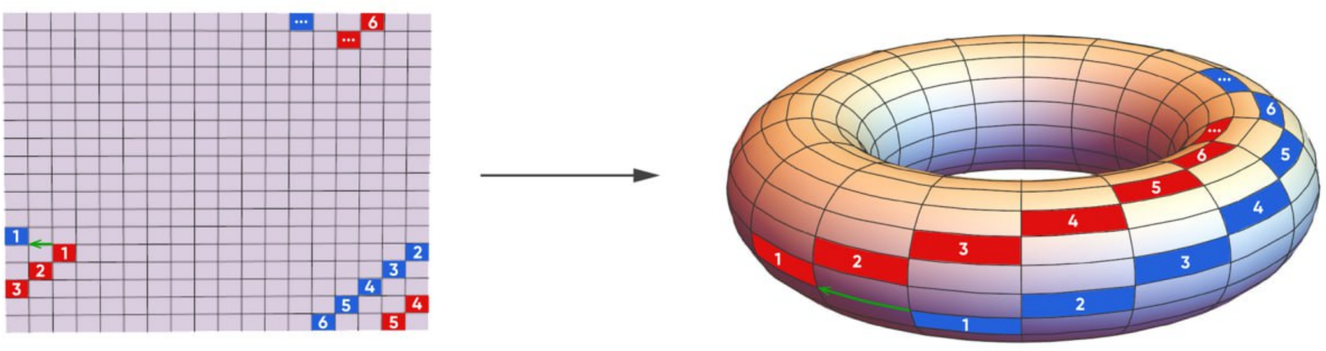


Маляр ходит по тору «по диагонали». Через несколько ходов маляр вернулся на клетку, с которой начинал. Сколько в этот момент красных клеток на листе?

Ответ. 14000.

Решение варианта 1. Надо понять, сколько будет покрашено клеток в тот момент, когда маляр вернётся в изначальную клетку. Заметим, что после каждых 2000 ходов маляр возвращается в начальный столбец, а после каждых 140 ходов — в начальную строку. Значит, в начальную клетку он первый раз вернётся после $\text{НОК}(2000, 140) = 14000$ ходов. Тем самым всего будет покрашено в красный цвет 14000 клеток.

Комментарий. Отметим, что количество покрашенных клеток не зависит от того, с какой клетки стартует маляр! Если в формулировке с листом бумаги это может быть не очевидно, то в формулировке с тором более понятно: см. на рисунке два пути — стартующих с красной и с синей клеток. Интуитивно ясно, что эти два пути получаются друг из друга «сдвигом» по поверхности тора.



10-8-2. Размер 2000×70 заменён на размер 5000×70.
Ответ. 35000.

10-8-3. Размер 2000×70 заменён на размер 2000×90.
Ответ. 18000.

10-8-4. Размер 2000×70 заменён на размер 3000×70.
Ответ. 21000.