Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2022-2023
группа 1
Задания и решения

18 октября 2022 г.

11 класс

1. Вариант 1.

При перемножении двух двузначных чисел получилось четырёхзначное число A, у которого первая цифра совпадает со второй, а предпоследняя – с последней. Найдите наименьшее A, если известно, что A делится на 51.

Ответ. 1122.

Решение.

Заметим, что $A = \overline{xxyy} = x \cdot 11 \cdot 100 + y \cdot 11 = 11 \cdot (100x + y)$. Так как 51 и 11 взаимно просты, то $100x + y$ кратно 51. Минимальное $x = 1$, поэтому $y = 2$ (единственное число от 100 до 109 кратное 51, это 102).

Вариант 2.

При перемножении двух двузначных чисел получилось четырёхзначное число A, у которого первая цифра совпадает со второй, а предпоследняя – с последней. Найдите наименьшее A, если известно, что A делится на 53.

Ответ. 1166.

Вариант 3.

При перемножении двух двузначных чисел получилось четырёхзначное число A, у которого первая цифра совпадает со второй, а предпоследняя – с последней. Найдите наименьшее A, если известно, что A делится на 27.

Ответ. 1188.

Вариант 4.

При перемножении двух двузначных чисел получилось четырёхзначное число A, у которого первая цифра совпадает со второй, а предпоследняя – с последней. Найдите наименьшее A, если известно, что A делится на 29.

Ответ. 2233.

2. Вариант 1.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых три последние цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию (числа не могут начинаться с нуля).

Ответ. 180.

Решение. Разность прогрессии не может быть больше 4.

Для $d = 1$ – есть восемь подходящих прогрессий из цифр: от 012 до 789.

Для $d = 2$ – шесть: от 024 до 579.

Для $d = 3$ – четыре: от 036 до 369.

Для $d = 4$ – две: 048 и 159.

Итого, $8 + 6 + 4 + 2 = 20$ вариантов для трёх последних цифр. Выбирая для каждого из них первую цифру девятью способами, получаем ответ $20 \cdot 9 = 180$.

Вариант 2.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых три первые цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию (числа не могут начинаться с нуля).

Ответ. 160.

Вариант 3.

Найдите количество пятизначных чисел, у которых три последние цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию (числа не могут начинаться с нуля).

Ответ. 1800.

Вариант 4.

Найдите количество пятизначных чисел, у которых три первые цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию (числа не могут начинаться с нуля).

Ответ. 1600.

3. Вариант 1.

Найдите отношение $\frac{16b^2}{ac}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в 4 раза больше другого.

Ответ. 100.

Решение.

По теореме Виета, $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = 5x_2$ и $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = 4x_2^2$. Выразим $x_2 = -\frac{b}{5a}$ из первого уравнения и подставим во второе: $\frac{c}{a} = \frac{4b^2}{25a^2}$. Далее найдём $\frac{b^2}{ac} = \frac{25}{4}$.

Вариант 2.

Найдите отношение $\frac{27b^2}{ac}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в 3 раза больше другого.

Ответ. 144.

Вариант 3.

Найдите отношение $\frac{15b^2}{ac}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 5 раз больше другого.

Ответ. 108.

Вариант 4.

Найдите отношение $\frac{40b^2}{ac}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 2 раза больше другого.

Ответ. 180.

4. Вариант 1.

Известно, что
$$\frac{1}{\cos(2022x)}+\operatorname{tg}(2022x)=\frac{1}{2022}.$$
Найдите $\frac{1}{\cos(2022x)}-\operatorname{tg}(2022x)$.

Ответ. 2022.

Решение 1.

$\frac{1}{\cos 2A}+\operatorname{tg} 2A=\frac{1+\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A+2\sin A\cdot\cos A}{\cos^2 A-sin^2 A}=\frac{(\cos A+\sin A)^2}{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}=\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}$

$\frac{1}{\cos 2A}-\operatorname{tg} 2A=\frac{1-\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cdot\cos A}{\cos^2 A-sin^2 A}=\frac{(\cos A-\sin A)^2}{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}=\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}$

Следовательно, если $\frac{1}{\cos(2022x)}+\operatorname{tg}(2022x)=\frac{1}{2022}$, то $\frac{1}{\cos(2022x)}-\operatorname{tg}(2022x)=2022$.

Решение 2.

Рассмотрим произведение $\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha=1$. Поэтому искомое выражение равно 2022.

Вариант 2.

Известно, что
$$\frac{1}{\cos(2023x)}+\operatorname{tg}(2023x)=\frac{1}{2023}.$$
Найдите $\frac{1}{\cos(2023x)}-\operatorname{tg}(2023x)$.

Ответ. 2023.

Вариант 3.

Известно, что
$$\frac{1}{\cos(2021x)}+\operatorname{tg}(2021x)=\frac{1}{2021}.$$
Найдите $\frac{1}{\cos(2021x)}-\operatorname{tg}(2021x)$.

Ответ. 2021.

Вариант 4.

Известно, что

$$\frac{1}{\cos(2002x)} + \operatorname{tg}(2002x) = \frac{1}{2002}.$$

Найдите $\frac{1}{\cos(2002x)} - \operatorname{tg}(2002x)$.

Ответ. 2002.

5. Вариант 1.

Известно, что

$$(x^2 - x + 3)(y^2 - 6y + 41)(2z^2 - z + 1) = 77.$$

Найдите $\frac{xy}{z}$.

Ответ. 6.

Решение.

$x^2 - x + 3 = (x - 0,5)^2 + 2,75 \geq 2,75;$

$y^2 - 6y + 41 = (y - 3)^2 + 32 \geq 32;$

$2z^2 - z + 1 = 2(z - 0,25)^2 + 0,875 \geq 0,875;$

Следовательно, $(x^2-x+3)(y^2-6y+41)(2z^2-z+1) \geq 77$ и, если хотя бы одно из трёх неравенств строгое, то левая часть больше 77. Значит, все три неравенства должны обращаться в равенства. Это происходит при $x = 0,5$, $y = 3$, $z = 0,25$.

Вариант 2.

Известно, что

$$(x^2 + x + 3)(y^2 + 10y + 57)(2z^2 + z + 2) = 165.$$

Найдите $\frac{xy}{z}$.

Ответ. -10.

Вариант 3.

Известно, что

$$(x^2 + x + 5)(y^2 + 6y + 41)(2z^2 + z + 2) = 285.$$

Найдите $\frac{xy}{z}$.

Ответ. -6.

Вариант 4.

Известно, что

$$(x^2 + x + 5)(y^2 + 10y + 57)(2z^2 + z + 1) = 133.$$

Найдите $\frac{xy}{z}$.

Ответ. -10.

6. Вариант 1.

В районе три посёлка A, B и C связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовем *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки A и B связывают 34 пути, посёлки B и C – 29 путей. Какое наибольшее число путей может связывать посёлки A и C?

Ответ. 106.

Решение.

Пусть между городами A и B проходит k дорог, между городами B и C – m дорог, между городами A и C – n дорог. Тогда количество путей из A в B равно $k + mn$, а количество путей из B в C равно $m + kn$. Мы получили систему уравнений $k + mn = 34$, $m + kn = 29$, в которой неизвестные – натуральные числа, большие 1. Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $(m - k)(n - 1) = 5$. Нам осталось перебрать все делители 5: 1 и 5. Следовательно, $n = 2$ или $n = 6$. Для каждого из них находим m и k, решая соответствующую систему линейных уравнений. Если $n = 2$, то $k = 8$ и $m = 13$. Если $n = 6$, то $k = 4$ и $m = 5$. Количество путей, связывающих города А и В, равно $n + km$. В первом случае $n + km = 2 + 8 \cdot 13 = 106$, а во втором – $n + km = 6 + 4 \cdot 5 = 26$. Значит, искомый ответ равен 106.

Вариант 2.

В районе три посёлка A, B и C связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовем *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки A и B связывают 55 пути, посёлки B и C – 50 путей. Какое наибольшее число путей может связывать посёлки A и C?

Ответ. 302.

Вариант 3.

В районе три посёлка A, B и C связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовем *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки A и B связывают 64 пути, посёлки B и C – 53 путей. Какое наибольшее число путей может связывать посёлки A и C?

Ответ. 352.

Вариант 4.

В районе три посёлка A, B и C связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовем *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки A и B связывают 74 пути, посёлки B и C – 61 путей. Какое наибольшее число путей может связывать посёлки A и C?

Ответ. 466.

7. Вариант 1.

По кругу выписано 103 натуральных числа. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два четных числа. Какое наименьшее количество четных чисел может быть во всем круге?

Ответ: 42.

Решение.

Покажем, что найдутся 3 подряд идущих числа, среди которых есть по крайней мере 2 чётных. Это можно сделать, например, так. Рассмотрим 15 подряд идущих чисел. Они разбиваются на 3 пятёрки подряд идущих чисел, значит, среди них есть по крайней мере 6 чётных. Но эти 15 чисел можно разбить на 5 троек подряд идущих чисел. Значит, по принципу Дирихле в какой-то тройке есть хотя бы 2 чётных числа.

Зафиксируем эти 3 числа. Среди них есть хотя бы 2 чётных. Остальные 100 разобьем на 20 пятёрок подряд идущих. В каждой такой пятёрке будет не менее двух чётных чисел. Таким образом, общее количество чётных чисел не менее $2+2\cdot 20 = 42$. Такая ситуация возможна. Пронумеруем числа по кругу. И чётными можно взять числа с номерами 1, 2, 6, 7, . . . , 96, 97, 101, 102. (Возможны и другие примеры.)

Вариант 2.

По кругу выписано 153 натуральных числа. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два четных числа. Какое наименьшее количество четных чисел может быть во всем круге?

Ответ: 62.

Вариант 3.

По кругу выписано 203 натуральных числа. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два четных числа. Какое наименьшее количество четных чисел может быть во всем круге?

Ответ: 82.

Вариант 4.

По кругу выписано 253 натуральных числа. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два четных числа. Какое наименьшее количество четных чисел может быть во всем круге?

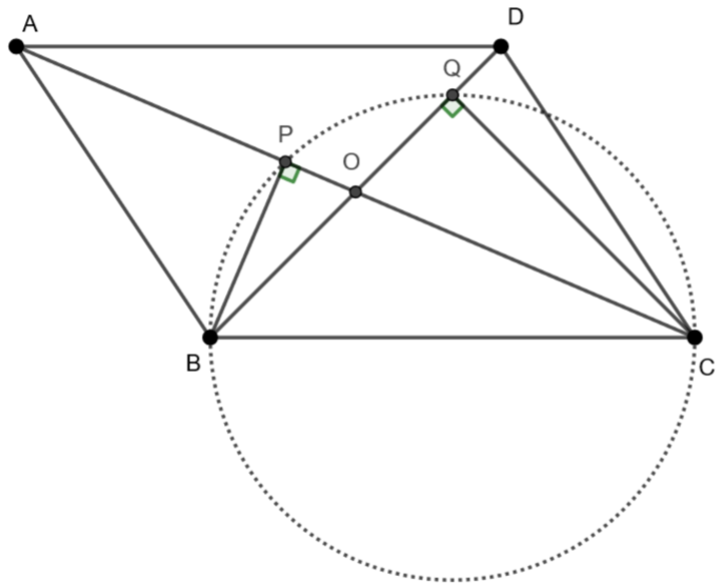
Ответ: 102.

8. Вариант 1.

Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть BP и CQ – перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на диагонали AC и BD соответственно (точка P лежит на отрезке AC, а точка Q лежит на отрезке BD). Найдите отношение $\frac{10BD}{AC}$, если $\frac{AP}{AC} = \frac{4}{9}$ и $\frac{DQ}{DB} = \frac{28}{81}$.

Ответ. 6.

Решение. Обозначим через O точку пересечения диагоналей. Заметим, что точки B, C, Q, P лежат на одной окружности (отрезок BC из точек P и Q виден под прямым углом). Следовательно, треугольники BOP и COQ подобны. Обозначим $AC = 2a$, $BD = 2b$. Тогда $PO = a - \frac{8a}{9} = \frac{a}{9}$, $QO = b - \frac{56b}{81} = \frac{25b}{81}$. Из подобия треугольников BOP и COQ имеем $\frac{PO}{QO} = \frac{BO}{CO}$. $\frac{a}{9} : \frac{25b}{81} = \frac{b}{a}$. $\frac{81a}{9\cdot 25b} = \frac{b}{a}$, откуда $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$.



Вариант 2.

Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть BP и CQ – перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на диагонали AC и BD соответственно (точка P лежит на отрезке AC, а точка Q лежит на отрезке BD). Найдите отношение $\frac{6AC}{BD}$, если $\frac{AP}{AC} = \frac{4}{9}$ и $\frac{DQ}{DB} = \frac{16}{81}$.

Ответ. 14.

Вариант 3.

Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть BP и CQ – перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на диагонали AC и BD соответственно (точка P лежит на отрезке AC, а точка Q лежит на отрезке BD). Найдите отношение $AC : BD$, если $AP : AC = 12/25$ и $DQ : DB = 8/25$.

Ответ. 3.

Вариант 4.

Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть BP и CQ – перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на диагонали AC и BD соответственно (точка P лежит на отрезке AC, а точка Q лежит на отрезке BD). Найдите отношение $AC : BD$, если $AP : AC = 0,49$ и $DQ : DB = 0,41$.

Ответ. 3.