

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 11 класса, 2022–2023 учебный год

1. Число 1232 делится на сумму своих цифр  $1 + 2 + 3 + 2 = 8$ . Какое следующее число делится на сумму своих цифр?

**Ответ.** 1233.

**Решение.** Можно заметить, что следующее число подходит, так как 1233 делится на сумму своих цифр  $1 + 2 + 3 + 3 = 9$ . Действительно,  $1233 : 9 = 137$ .

**Комментарий.** Можно было не выполнять деление, а воспользоваться признаком делимости на 9.

2. Вася сконструировал робота, но что-то напутал в программе, поэтому робот совершает случайные движения, которые почему-то всё равно всегда приводят его в нужную точку.

Ход — это перемещение на один километр либо на север (N), либо на восток (E), либо на юг (S), либо на запад (W).

Робот достиг своей цели за 22 хода

E E N E N N W N E N E S E E E E S S S W N.

Сколько ходов бы потребовалось роботу, если бы он не делал лишних движений?

**Ответ.** 10.

**Решение.** Посчитаем количество букв каждого типа. E встречается 10 раз, W — 2 раза, N — 6 раз, S — 4 раза. Итого, цель робота: 8 км на восток и 2 км на север. Поэтому без лишних ходов маршрут составил бы  $8 + 2 = 10$  ходов.

3. Фермер хочет начать выращивать арбузы. Он хочет продавать хотя бы 10 000 арбузов каждый год. Арбузы выращивают из семян (одна семечка вырастает в один арбуз). Каждый арбуз может дать 250 хороших семян, которые можно посадить на следующий год, но тогда этот арбуз нельзя будет продать. Какое наименьшее количество семян арбуза должен купить фермер, чтобы запустить выращивание арбузов, и больше никогда не покупать семена?

**Ответ.** 10041.

**Решение.** Пусть наименьшее количество семян, которые должен купить фермер равно  $10000 + x$ . Тогда он сможет продать 10000 арбузов, а оставшиеся  $x$  арбузов пустить на семена. Для того, чтобы семян хватило на следующий сезон, должно выполняться неравенство  $250x \geq 10000 + x$ . Откуда  $x \geq \frac{10000}{249} = 40 \frac{40}{249}$ . Поэтому  $x = 41$ .

4. Про функцию  $f(x)$  известно, что она нечётная, т.е.  $f(-x) = -f(x)$  для каждого действительного  $x$ . Кроме того, известно, что для каждого  $x$  выполняется  $f(x+5) = f(x)$ , а ещё  $f(1/3) = 2022$ , а  $f(1/2) = 17$ . Чему равняется

$$f(-7) + f(12) + f\left(\frac{16}{3}\right) + f\left(\frac{9}{2}\right)?$$

**Ответ.** 2005.

**Решение.** Найдём отдельно значения  $f(-7) + f(12)$ ,  $f\left(\frac{16}{3}\right)$  и  $f\left(\frac{9}{2}\right)$ .

- $f(-7) + f(12) = f(-7 + 5) + f(12 - 2 \cdot 5) = f(-2) + f(2) = 0$ ;
- $f\left(\frac{16}{3}\right) = f\left(5 + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 2022$ .
- $f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(5 - \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -17$

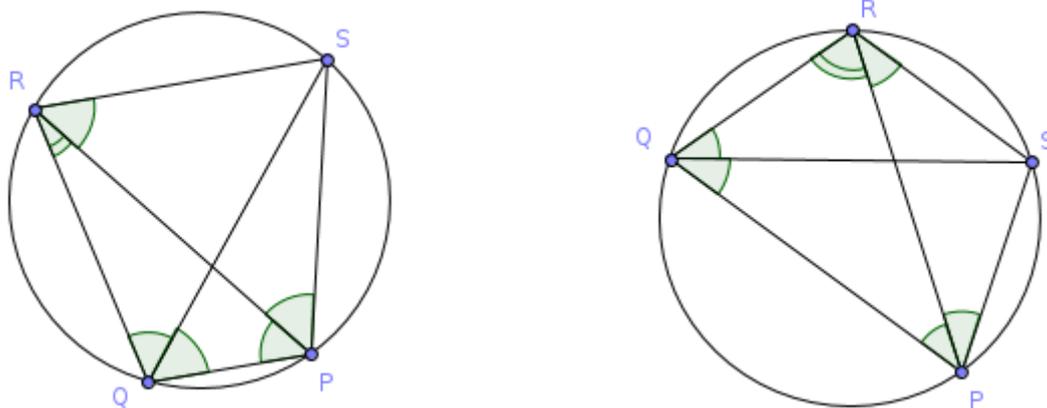
Ответ равен  $0 + 2022 - 17 = 2005$ .

5. Каждая из диагоналей вписанного четырёхугольника  $ABCD$  является биссектрисой одного из углов, из которого она проведена, а также делит второй угол в отношении  $1 : 2$ . Чему может равняться угол  $\angle A$  этого четырёхугольника? Ответ выразите в градусах. Укажите все возможные варианты. Если необходимо, ответ округлите до сотых или запишите в виде обыкновенной дроби.

**Ответ.** 72, 108,  $\frac{720}{7}$ ,  $\frac{540}{7}$ .

**Решение.** Пусть во вписанном четырёхугольнике  $PQRS$  диагонали являются биссектрисами углов  $P$  и  $Q$ , а также делят углы  $R$  и  $S$  в отношении  $1 : 2$ .

Вспомним, что вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Так как  $PR$  и  $QS$  — биссектрисы (т.е.  $\angle PQS = \angle SQR$ ,  $\angle SPR = \angle RPQ$ ), то дуги  $QR$ ,  $RS$  и  $SP$  равны. Так как  $PR$  делит угол  $R$  в отношении  $1 : 2$ , то дуга  $PQ$  или в два раза меньше дуги  $QR$  или в два раза больше.



- В первом случае (чертёж слева) получаем, что дуга  $PQ$  составляет  $\frac{1}{7}$  от всей окружности, т.е. равна  $\frac{1}{7} \cdot 360^\circ$ , а дуги  $QR$ ,  $RS$ ,  $SP$  — в два раза больше, т.е. равны  $\frac{2}{7} \cdot 360^\circ$ . Тогда углы четырёхугольника получаются  $\angle P = \angle Q = \frac{4}{7} \cdot 180^\circ$  и  $\angle R = \angle S = \frac{3}{7} \cdot 180^\circ$ .
- Во втором случае (чертёж справа) получаем, что дуга  $PQ$  составляет  $\frac{2}{5}$  от всей окружности, т.е. равна  $\frac{2}{5} \cdot 360^\circ$ , а дуги  $QR$ ,  $RS$ ,  $SP$  — в два раза меньше, т.е. равны  $\frac{1}{5} \cdot 360^\circ$ . Тогда углы четырёхугольника получаются  $\angle P = \angle Q = \frac{2}{5} \cdot 180^\circ$  и  $\angle R = \angle S = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ$ .

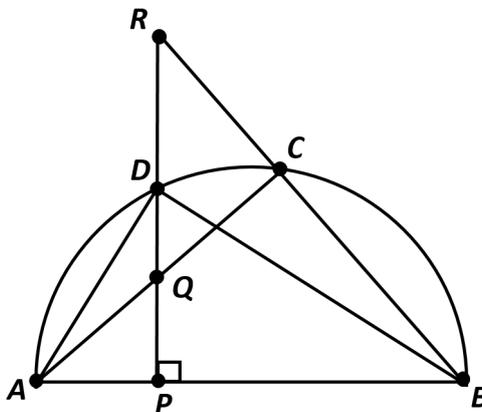
Угол  $\angle A$  может быть любым из найденных углов, поэтому ответ  $\frac{3}{7} \cdot 180^\circ = \frac{540^\circ}{7}$ ,  $\frac{4}{7} \cdot 180^\circ = \frac{720^\circ}{7}$ ,  $\frac{2}{5} \cdot 180^\circ = 72^\circ$  или  $\frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ$ .

6. У чисел  $1000^2$ ,  $1001^2$ ,  $1002^2$ , ... отбрасывают по три последние цифры. Сколько первых членов полученной последовательности образуют арифметическую прогрессию?

**Ответ.** 32.

**Решение.**  $(1000 + k)^2 = 1\,000\,000 + 2000k + k^2$ . Пока  $k^2 < 1000$ , после отбрасывания трёх цифр, будет оставаться число  $1000 + 2k$ , т.е. каждый член последовательности будет больше предыдущего на 2. При  $k = 31$ :  $k^2 = 961 < 1000$ , а при  $k = 32$ :  $k^2 = 1024$ . Поэтому элемент получающийся из  $1032^2$  будет отличаться от предыдущего уже на 3. Следовательно, длина прогрессии равна количеству чисел от 1000 до 1031, т.е. 32.

7. Треугольники  $ABC$  и  $ABD$  вписаны в полуокружность с диаметром  $AB = 5$ . Перпендикуляр из  $D$  на  $AB$  пересекает отрезок  $AC$  в точке  $Q$ , луч  $BC$  в точке  $R$ , а отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Известно, что  $PR = 27/10$ , а  $PQ = 5/6$ . Найдите длину отрезка  $DP$ . Если необходимо, ответ округлите до сотых.



**Ответ.** 1,5.

**Решение.** Поскольку  $AB$  — диаметр, то  $\angle ADB = \angle ACD = 90^\circ$ . Углы  $\angle QAB$  и  $\angle PRB$  равны, так как дополняются углом  $\angle CBA$  до  $90^\circ$ . Поэтому треугольники  $\triangle APQ$  и  $\triangle RPB$  подобны по двум углам. Значит,  $\frac{AP}{PQ} = \frac{RP}{PB}$ , откуда  $AP \cdot PB = PQ \cdot PR = \frac{27}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{9}{4}$ . Осталось вспомнить свойство высоты прямоугольного треугольника:  $DP^2 = AP \cdot PB$ , откуда  $DP = \frac{3}{2}$ .

8. Сумма восьми чисел равна  $\frac{4}{5}$ . Оказалось, что сумма любых семи чисел из этих восьми неотрицательна. Какое наименьшее значение может принимать одно из данных чисел?

**Ответ.**  $-4,8$ .

**Решение.** Обозначим числа через  $a_1, a_2, \dots, a_8$ . По условию,  $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = \frac{4}{5}$ . Заметим, что сумма всех чисел, кроме одного, неотрицательна, поэтому каждое число не превосходит  $\frac{4}{5}$  (и наоборот, если каждое из чисел не превосходит  $\frac{4}{5}$ , сумма без любого из чисел неотрицательна). Тогда сумма любых семи чисел не превосходит  $7 \cdot \frac{4}{5}$ , а тогда оставшееся число должно быть хотя бы  $-6 \cdot \frac{4}{5}$ .

С другой стороны, если одно из чисел равно  $-\frac{24}{5}$ , а каждое из оставшихся равно  $\frac{4}{5}$ , то все условия выполняются. Значит, наименьшее возможное значение одного из чисел равно  $-\frac{24}{5} = -4,8$ .

## Информация о других клонах

1. Число 1016 делится на сумму своих цифр  $1 + 0 + 1 + 6 = 8$ . Какое следующее число делится на сумму своих цифр?

**Ответ.** 1017.

1. Число 2024 делится на сумму своих цифр  $2 + 0 + 2 + 4 = 8$ . Какое следующее число делится на сумму своих цифр?

**Ответ.** 2025.

1. Число 2240 делится на сумму своих цифр  $2 + 2 + 4 + 0 = 8$ . Какое следующее число делится на сумму своих цифр?

**Ответ.** 2241.

2. Вася сконструировал робота, но что-то напутал в программе, поэтому робот совершает случайные движения, которые почему-то всё равно всегда приводят его в нужную точку.

Ход — это перемещение на один километр либо на север (N), либо на восток (E), либо на юг (S), либо на запад (W).

Робот достиг своей цели за 22 хода

S E N S E S W N N S E W W W N E S E N N E N.

Сколько ходов бы потребовалось роботу, если бы он не делал лишних движений?

**Ответ.** 4.

2. Вася сконструировал робота, но что-то напутал в программе, поэтому робот совершает случайные движения, которые почему-то всё равно всегда приводят его в нужную точку.

Ход — это перемещение на один километр либо на север (N), либо на восток (E), либо на юг (S), либо на запад (W).

Робот достиг своей цели за 22 хода

E E S E W S S W E W S S N E W N S S S E E N.

Сколько ходов бы потребовалось роботу, если бы он не делал лишних движений?

**Ответ.** 8.

2. Вася сконструировал робота, но что-то напутал в программе, поэтому робот совершает случайные движения, которые почему-то всё равно всегда приводят его в нужную точку.

Ход — это перемещение на один километр либо на север (N), либо на восток (E), либо на юг (S), либо на запад (W).

Робот достиг своей цели за 22 хода

W N S N E E W S W E W W W S W S N S E E W W.

Сколько ходов бы потребовалось роботу, если бы он не делал лишних движений?

**Ответ.** 6.

3. Фермер хочет начать выращивать арбузы. Он хочет продавать хотя бы 9 000 арбузов каждый год. Арбузы выращивают из семян (одна семечка вырастает в один арбуз). Каждый арбуз может дать 300 хороших семян, которые можно посадить на следующий год, но тогда этот арбуз нельзя будет продать. Какое наименьшее количество семян арбуза должен купить фермер, чтобы запустить выращивание арбузов, и больше никогда не покупать семена?

**Ответ.** 9031.

3. Фермер хочет начать выращивать арбузы. Он хочет продавать хотя бы 12 000 арбузов каждый год. Арбузы выращивают из семян (одна семечка вырастает в один арбуз). Каждый арбуз может дать 300 хороших семян, которые можно посадить на следующий год, но тогда этот арбуз нельзя будет продать. Какое наименьшее количество семян арбуза должен купить фермер, чтобы запустить выращивание арбузов, и больше никогда не покупать семена?

**Ответ.** 12041.

3. Фермер хочет начать выращивать арбузы. Он хочет продавать хотя бы 11 000 арбузов каждый год. Арбузы выращивают из семян (одна семечка вырастает в один арбуз). Каждый арбуз может дать 200 хороших семян, которые можно посадить на следующий год, но тогда этот арбуз нельзя будет продать. Какое наименьшее количество семян арбуза должен купить фермер, чтобы запустить выращивание арбузов, и больше никогда не покупать семена?

**Ответ.** 11056.

4. Про функцию  $f(x)$  известно, что она нечётная, т.е.  $f(-x) = -f(x)$  для каждого действительного  $x$ . Кроме того, известно, что для каждого  $x$  выполняется  $f(x+4) = f(x)$ , а ещё  $f(1/3) = 2022$ , а  $f(1/2) = 8$ . Чему равняется

$$f(-1) + f(13) + f\left(\frac{13}{3}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right)?$$

**Ответ.** 2014.

4. Про функцию  $f(x)$  известно, что она нечётная, т.е.  $f(-x) = -f(x)$  для каждого действительного  $x$ . Кроме того, известно, что для каждого  $x$  выполняется  $f(x+6) = f(x)$ , а ещё  $f(1/3) = 2022$ , а  $f(1/2) = 14$ . Чему равняется

$$f(-7) + f(13) + f\left(\frac{19}{3}\right) + f\left(\frac{11}{2}\right)?$$

**Ответ.** 2008.

4. Про функцию  $f(x)$  известно, что она нечётная, т.е.  $f(-x) = -f(x)$  для каждого действительного  $x$ . Кроме того, известно, что для каждого  $x$  выполняется  $f(x+3) = f(x)$ , а ещё  $f(1/3) = 2022$ , а  $f(1/2) = 11$ . Чему равняется

$$f(-5) + f(11) + f\left(\frac{10}{3}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)?$$

**Ответ.** 2011.

5. Каждая из диагоналей вписанного четырёхугольника  $ABCD$  является биссектрисой одного из углов, из которого она проведена, а также делит второй угол в отношении 1 : 3. Чему может равняться угол  $\angle A$  этого четырёхугольника? Ответ выразите в градусах. Укажите все возможные варианты. Если необходимо, ответ округлите до сотых или запишите в виде обыкновенной дроби.

**Ответ.** 108, 72, 60, 120.

5. Каждая из диагоналей вписанного четырёхугольника  $ABCD$  является биссектрисой одного из углов, из которого она проведена, а также делит второй угол в отношении 2 : 3. Чему может равняться угол  $\angle A$  этого четырёхугольника? Ответ выразите в градусах. Укажите все возможные варианты. Если необходимо, ответ округлите до сотых или запишите в виде обыкновенной дроби.

**Ответ.** 80, 100,  $\frac{1080}{11}$ ,  $\frac{900}{11}$ .

5. Каждая из диагоналей вписанного четырёхугольника  $ABCD$  является биссектрисой одного из углов, из которого она проведена, а также делит второй угол в отношении 1 : 5. Чему может равняться угол  $\angle A$  этого четырёхугольника? Ответ выразите в градусах. Укажите все возможные варианты. Если необходимо, ответ округлите до сотых или запишите в виде обыкновенной дроби.

**Ответ.** 45, 135,  $\frac{225}{2}$ ,  $\frac{135}{2}$ .

6. У чисел  $1001^2$ ,  $1002^2$ ,  $1003^2$ , ... отбрасывают по три последние цифры. Сколько первых членов полученной последовательности образуют арифметическую прогрессию?

**Ответ.** 31.

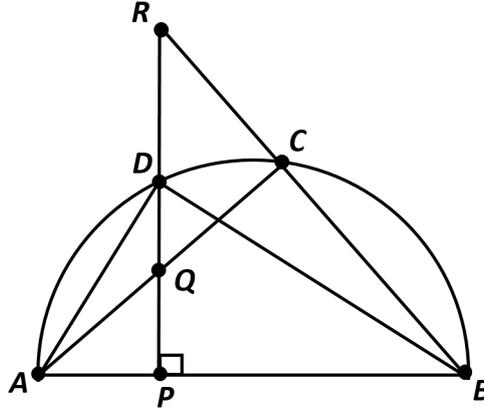
6. У чисел  $10000^2$ ,  $10001^2$ ,  $10002^2$ , ... отбрасывают по четыре последние цифры. Сколько первых членов полученной последовательности образуют арифметическую прогрессию?

Ответ. 100.

6. У чисел  $10001^2$ ,  $10002^2$ ,  $10003^2$ , ... отбрасывают по четыре последние цифры. Сколько первых членов полученной последовательности образуют арифметическую прогрессию?

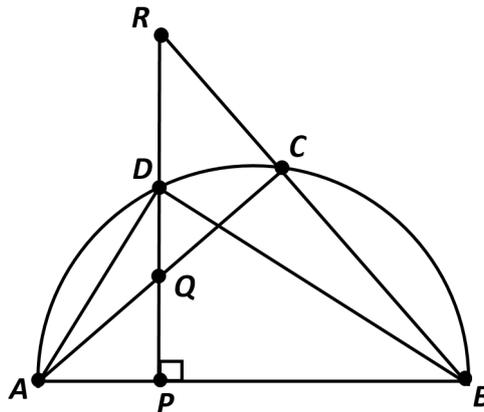
Ответ. 99.

7. Треугольники  $ABC$  и  $ABD$  вписаны в полуокружность с диаметром  $AB = 7$ . Перпендикуляр из  $D$  на  $AB$  пересекает отрезок  $AC$  в точке  $Q$ , луч  $BC$  в точке  $R$ , а отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Известно, что  $PR = 15/4$ , а  $PQ = 5/3$ . Найдите длину отрезка  $DP$ . Если необходимо, ответ округлите до сотых.



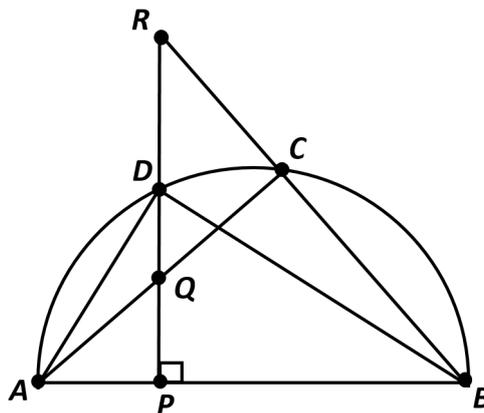
Ответ. 2,5.

7. Треугольники  $ABC$  и  $ABD$  вписаны в полуокружность с диаметром  $AB = 10$ . Перпендикуляр из  $D$  на  $AB$  пересекает отрезок  $AC$  в точке  $Q$ , луч  $BC$  в точке  $R$ , а отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Известно, что  $PR = 21/5$ , а  $PQ = 35/12$ . Найдите длину отрезка  $DP$ . Если необходимо, ответ округлите до сотых.



Ответ. 3,5.

7. Треугольники  $ABC$  и  $ABD$  вписаны в полуокружность с диаметром  $AB = 10$ . Перпендикуляр из  $D$  на  $AB$  пересекает отрезок  $AC$  в точке  $Q$ , луч  $BC$  в точке  $R$ , а отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Известно, что  $PR = 27/5$ , а  $PQ = 15/4$ . Найдите длину отрезка  $DP$ . Если необходимо, ответ округлите до сотых.



Ответ. 4,5.

8. Сумма восьми чисел равна  $\frac{3}{5}$ . Оказалось, что сумма любых семи чисел из этих восьми неотрицательна. Какое наименьшее значение может принимать одно из данных чисел?

**Ответ.**  $-3,6$ .

8. Сумма восьми чисел равна  $\frac{3}{4}$ . Оказалось, что сумма любых семи чисел из этих восьми неотрицательна. Какое наименьшее значение может принимать одно из данных чисел?

**Ответ.**  $-4,5$ .

8. Сумма восьми чисел равна  $\frac{5}{4}$ . Оказалось, что сумма любых семи чисел из этих восьми неотрицательна. Какое наименьшее значение может принимать одно из данных чисел?

**Ответ.**  $-7,5$ .