Школьный этап ВСОШ по математике, 2022-2023 учебный год, 11 класс.

1.1. *При каком наименьшем натуральном значении b уравнение*

$$x^2 + bx + 25 = 0$$

имеет хотя бы один корень?

Ответ: 10

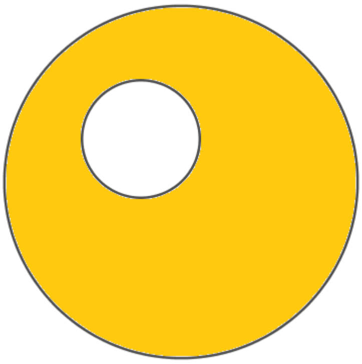
Решение. Уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда дискриминант $D = b^2 - 4\cdot 25 = b^2 - 100$ больше или равен 0. Для положительных b это условие эквивалентно условию $b \geqslant 10$.

2.1. *Каждый месяц Иван платит фиксированную сумму из своей зарплаты за ипотеку, а остальная часть зарплаты тратится на текущие расходы. В декабре Иван заплатил за ипотеку 40 % своей зарплаты. В январе зарплата Ивана увеличилась на 9 %. На сколько процентов в январе увеличилась сумма, потраченная на текущие расходы (по сравнению с декабрьской)?*

Ответ: 15

Решение. Примем декабрьскую зарплату Ивана за $100r$. Тогда за ипотеку Иван заплатил $40r$, и в декабре на текущие расходы он потратил $60r$. В январе зарплата Ивана составила $109r$, значит, на текущие расходы он потратил $109r - 40r = 69r$. Таким образом, сумма, потраченная на текущие расходы, выросла на $9r$, что составляет $\dfrac{9}{60}$ часть от декабрьской или 15 процентов.

3.1. *Известно, что площадь закрашенной области фигуры равна $\dfrac{32}{\pi}$, а радиус меньшей окружности в 3 раза меньше радиуса большей окружности. Чему равна длина меньшей окружности?*



Ответ: 4

Решение. Радиус меньшей окружности обозначим за R, тогда радиус большей равен $3R$. Площадь меньшего круга равна $S_1 = \pi R^2$, а площадь большего — $S_2 = \pi(3R)^2 = 9\pi R^2$. Тогда площадь закрашенной части равна $S_2 - S_1 = 8\pi R^2$. Имеем $8\pi R^2 = \dfrac{32}{\pi}$, откуда $(\pi R)^2 = 4$ и $\pi R = 2$. Значит, длина меньшей окружности равна $2\pi R = 4$.

4.1. *В произведении*

$$24^a \cdot 25^b \cdot 26^c \cdot 27^d \cdot 28^e \cdot 29^f \cdot 30^g$$

вместо семи показателей a, b, c, d, e, f, g поставили в некотором порядке семь чисел 1, 2, 3, 5, 8, 10, 11. Найдите наибольшее количество нулей, на которые может заканчиваться десятичная запись этого произведения.

Ответ: 32

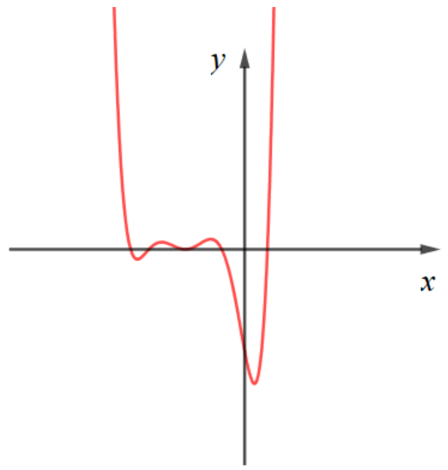
Решение. Простой множитель 5 входит в разложение этого произведения с кратностью $2b + g$, поэтому в данном произведении не более $2b + g$ нулей. Так как $b \leqslant 11$ (наибольший из данных показателей) и $b + g \leqslant 11 + 10$ (сумма двух наибольших из данных показателей), то $2b + g \leqslant 11 + 11 + 10 = 32$.

С другой стороны, например, произведение $24^8 \cdot 25^{11} \cdot 26^1 \cdot 27^2 \cdot 28^3 \cdot 29^5 \cdot 30^{10}$ оканчивается в точности на 32 нуля, поскольку простое число 5 входит в разложение этого произведения с кратностью $2 \cdot 11 + 10 = 32$, а простое число 2 входит в разложение этого произведения с кратностью $3 \cdot 8 + 1 + 3 + 10 > 32$.

5.1. *На рисунке изображен график функции*

$$y = (x+a)(x+b)^2(x+c)(x+d)(x+e)$$

.



Сколько среди чисел a, c, d, e положительных?

Ответ: 3

Решение. Из формулы видим, что функция $f(x) = (x+a)(x+b)^2(x+c)(x+d)(x+e)$ меняет знак в точках $x = -a$, $x = -c$, $x = -d$, $x = -e$, а $x = -b$ — корень уравнения $f(x) = 0$, в котором знак $f(x)$ не меняется. Значит, точки $x = -a$, $x = -c$, $x = -d$, $x = -e$ соответствуют пересечению графика с осью Ox, а точка $x = -b$ — касанию графика оси Ox. Видим, что среди точек пересечения графика с осью Ox ровно три левее оси Oy. Это значит, что среди чисел $-a$, $-c$, $-d$, $-e$ ровно три отрицательных.

6.1. *Геометрическая прогрессия b_1, b_2, $\ldots$ такова, что $b_{25} = 2\operatorname{tg}\alpha$, $b_{31} = 2\sin\alpha$ для некоторого острого угла α. Найдите номер n, для которого $b_n = \sin 2\alpha$.*

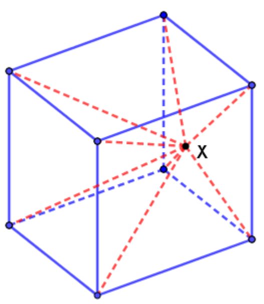
Ответ: 37

Решение. Пусть q знаменатель нашей прогрессии. Используем то, что $b_{31} = b_{25}q^6$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Имеем $q^6 = \dfrac{b_{31}}{b_{25}} = \dfrac{2\sin\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \cos\alpha$.

С другой стороны, $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \cos\alpha$, откуда $\sin 2\alpha = b_{31} \cdot q^6 = b_{37}$.

Видим, что $n = 37$ подходит. Никакое другое n не подходит, так как $0 < q^6 < 1$, значит $0 < |q| < 1$, поэтому никакие два члена прогрессии не совпадают.

7.1. *Дан прямоугольный параллелепипед $2 \times 3 \times 2\sqrt{3}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма расстояний от произвольной точки пространства до всех восьми его вершин?*



Ответ: 20

Решение. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — данный параллелепипед. Сумма расстояний от точки X до двух противоположных вершин A и C' не меньше длины AC', т.е. длины d большой диагонали. Суммируя аналогичные неравенства, имеем $XA+XB+XC+XD+XA'+XB'+XC'+XD' = (XA+XC')+(XB+XD')+ +(XC+XA')+(XD+XB') \geqslant AC'+BD'+CA'+DB' = 4d$. При этом равенство достигается, когда X — это центр параллелепипеда.

Остается посчитать $d = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = 5$, а тогда ответ $4d = 20$.

8.1. *Пусть* $n = 34000$. *Среди вершин правильного* n*-угольника* $A_1A_2\dots A_n$ *красным цветом покрашены вершины* A_i*, для которых номер* i *является степенью двойки, т.е.* $i = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \dots$. *Сколькими способами можно выбрать 400 вершин данного* n*-угольника так, чтобы они являлись вершинами правильного 400-угольника и ни одна из них не была красной?*

Ответ: 77

Решение. Всего есть $\dfrac{34000}{400} = 85$ вариантов выбора правильного 400-угольника. Рассмотрим один из этих вариантов, в котором номера вершин 400-угольника имеют вид $a+85k$ для фиксированного $a \in \{1, 2, \dots, 85\}$. Посмотрим, в каких вариантах будут красные вершины.

Рассмотрим степени двойки, не превосходящие 34000: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \dots$. Они дают при делении на 85 остатки $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 43, 1, 2, \dots$ (начиная с 1, остатки повторяются, так как каждый следующий остаток получается из предыдущего умножением на 2 и взятием остатка при делении на 85). Таким образом, красные вершины в рассматриваемом 400-угольнике присутствуют тогда и только тогда, когда $a = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 43$, т.е. в 8 вариантах. Поэтому ответ — $85 - 8 = 77$.