11 класс

1. Найдите все представления числа 2022 в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел.

   Решение. Пусть a - первое число искомой последовательности, тогда $a + (a+1) + \dots + (a+p-1) = 2022$ и $pa + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(2a+p-1)}{2} = 2022.$ Заметим, что $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, следовательно $p(2a-1+p) = 2^2 \cdot 3 \cdot 337.$ Поскольку $p + 2a - 1 > p$ при натуральных a, то $p < 337$ и $p = 2,3,4,6$ или 12.

   Далее переберем возможные значения p и находим соответствующие значения a:

   если $p = 2$, то $2a - 1 + 2 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ и решений нет;

   если $p = 3$, то $2a - 1 + 3 = 2^2 \cdot 337$ и $a = 673$;

   если $p = 4$, то $2a - 1 + 4 = 3 \cdot 337$ и $a = 504$;

   если $p = 6$, то $2a - 1 + 6 = 2 \cdot 337$ и решений нет;

   если $p = 12$, то $2a - 1 + 12 = 337$ и $a = 163$.

   Ответ. Возможны 3 представления: 673+674+675; 504+505+506+507; 163+164+…+174.

Рекомендации к оцениванию решений. Если выписаны уравнения в виде арифметической прогрессии и далее задача сведена к решению уравнения вида $p(2a-1+p) = 2022$ - 2 балла.

Если задача верно сведена к решению $p(2a-1+p) = 2^2 \cdot 3 \cdot 337$ и показано, что $p = 2,3,4,6$ или 12 – не менее 4 балла.

2. Решите уравнение $8\sin(x) + 12sin^3(x) + 2022\, sin^5(x) = 8\cos(2x) + 12\cos^3(2x) + 2022\cos^5(2x)$.

   Решение. Введем в рассмотрение функцию $f(t) = 8t + 12t^3 + 2022t^5$ и тогда исходное уравнение можно представить в виде $f(\sin(x)) = f(\cos(2x))$.

   Заметим, что введенная функция $f(t)$ - монотонно возрастающая (как сумма трех монотонно возрастающих функций). Также монотонность функции $f(t)$ легко проверяется с помощью исследования производной этой функции.

   Поскольку $f(t)$ - монотонная, то уравнение $f(\sin(x)) = f(\cos(2x))$ равносильно уравнению

   $$\sin(x) = \cos(2x).$$

   Из последнего уравнения получим $2\,sin^2(x) + sin(x) - 1 = 0$,

   откуда $sin(x) = -1$ или $\sin(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}$.

   Таким образом, $\mathrm{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \mathrm{x} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

   Рекомендации к оцениванию решений.

   Если доказано, что исходное уравнение равносильно уравнению $\sin(x) = \cos(2x)$- не менее 4 балла.

   Если верно найдены только решения уравнения $\sin(x) = \cos(2x)$, но не доказано, что других решений нет -2 балла.

3. Докажите, что $3(ab + bc + ca) \le (a+b+c)^2 < 4(ab + bc + ca)$, где a, b и c - стороны треугольника. В каких случаях достигается равенство?

Решение. Докажем левое из двойного неравенства.

Запишем для произвольных a, b и c известные неравенства:

$2ab \le a^2 + b^2$, $2ac \le a^2 + c^2$ и $2bc \le c^2 + b^2$.

Сложив правые и левые части этих неравенств получим

$$2(ab + bc + ca) \le 2(a^2 + b^2 + c^2) \text{ или } ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2.$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства $2ab + 2bc + 2ca$ и воспользуемся формулой квадрата суммы для трех слагаемых, тогда

$$3(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2.$$

Легко проверить, что для сторон равностороннего треугольника, $a = b = c$

Достигается равенство $3(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$.

Докажем вторую часть неравенства

По условию задачи a, b и c - стороны треугольника, следовательно $|a - b| < c$, $|a - c| < b$ и $|c - b| < a$. Возводя обе части этих неравенств в квадрат получим:

$$a^2 - 2ab + b^2 < c^2$$
$$a^2 - 2ac + c^2 < b^2$$
$$c^2 - 2cb + b^2 < a^2$$

Сложив все три неравенства $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2cb < a^2 + b^2 + c^2$ или $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2cb < 0$. Далее $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2cb + 4(ab + bc + ca) < 4(ab + bc + ca)$ и тогда

$$(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca).$$

Заметим, что для «вырожденных» треугольников при $a + b = c$ неравенство $(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$ превращается в точное равенство.

Рекомендации к оцениванию решений.

Приведено только доказательство точности оценок -1 б.

За верное доказательство только одного неравенства – не более 3 баллов.

4. В 1011 открытых сундучках лежат 2022 монет. Вася и Петя по очереди берут по одной монете, первой выбирает Вася. Докажите, что Петя может выбирать монеты так, чтобы две последние монеты оказались из одного сундучка.

Решение. После выбора Васи, Петя может взять свою первую монету так, чтобы после этого хотя бы один сундучок опустел. В самом деле, после первого хода Васи осталось $2022 - 1$ монета в 1011 сундучках, и следовательно, в каком-то из сундучков осталось не более одной монеты. Если в этом сундуке одна монета, то Петя возьмет его. Если же в этом сундуке нет монет, то Петя может взять монету из любого другого сундука.

Итак, после того как Петя берет первую монету, один сундучок опустеет и остаётся 2020 монет в 1010 сундучках. Если Петя будет и дальше действовать таким же образом, то после того, как он возьмёт вторую монету, опустеют два сундучка, и так и далее..., после того, как Петя возьмёт 1010-ю монету, опустеют все сундучки, за исключением одного. Это и означает, что две оставшиеся монеты лежат в одном сундучке.

Рекомендации к оцениванию решений.

Верно описан первый ход Пети – не менее 3 баллов.

В случае решения задачи методом мат. индукции описан шаг индукции- не менее 3 баллов.

5. В треугольнике ABC синус угла A равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. На стороне AC взяли точку M так, что CM = b, на стороне AB взяли точку N так, что BN = a, T - середина NC, P - середина BM. Найдите PT.

Решение. 1 способ. Поскольку нам известны длины векторов $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC}$ и угол между ними, то, очевидно, необходимо выразить вектор $\overrightarrow{PT}$ через векторы $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{NC}$. Это можно сделать по-разному. Покажем один из возможных способов.

Заметим, что $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM})$ и $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AC})$. Поскольку $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$-$\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$-$\overrightarrow{NB}$, то $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC})$ и $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AC})$. Теперь $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{NB})$. Осталось найти длину вектора $\overrightarrow{PT}$

$$|PT|^2 = \left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{NC})\right|^2 = \frac{1}{4}(MC^2 + NC^2 - 2 \cdot MC \cdot NC \cdot \cos(A))=$$

$$= \frac{1}{4}\left(b^2 + a^2 \pm 2 \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 \pm ba).$$

В последней формуле берется знак «плюс» в случае когда угол A равен 120^o, и «минус», когда угол A равен 60^o.

Ответ. $\boldsymbol{PT = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2 \pm ba}.}$

2 способ. Пусть K –середина BC. Тогда PK и TK –средние линии треугольников MBC и NBC соответственно. Из свойств средних линий треугольника следует, что

$TK \parallel AB$, $PK \parallel AC$ и $\angle PKT = \angle A$, а также $PK = \frac{b}{2}$, $TK = \frac{a}{2}$. Теперь по теореме косинусов для треугольника PKT получим :

$$PT^2 = PK^2 + TK^2 - 2PK \cdot TK \cdot \cos(A) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(b^2 + a^2 \pm 2 \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 \pm ba).$$

Ответ. $\boldsymbol{PT = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2 \pm ba}}$

Рекомендации к оцениванию решений. Верно найдено представление вида $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{NC})$ или аналог для решения 2 – 3 балла. Верно разобран только один случай из двух – 4 балла.

6. На гранях BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра ABCD отмечены точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Известно, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 пересекаются в точке P, причем $\frac{AP}{A_1P} = \frac{BP}{B_1P} = \frac{CP}{C_1P} = \frac{DP}{D_1P} = r$. Найдите все возможные значения r.

Решение. Обозначим V объем* тетраэдра ABCD. Введем в рассмотрение разбиение исходного тетраэдра ABCD на тетраэдры PBCD, PACD, PABD и PABC. Тогда для объемов указанных тетраэдров справедливо:

$$V = V_{\mathrm{PBCD}} + V_{\mathrm{PACD}} + V_{\mathrm{PABD}} + V_{\mathrm{PABC}}.$$

Заметим, если H – высота тетраэдра ABCD, опущенная из вершины A на основание BCD, а h - высота тетраэдра PBCD, опущенная из вершины P на основание BCD, то $\frac{H}{h} = \frac{AA_1}{A_1P}$. В силу этого замечания и условия $r = \frac{AP}{A_1P} = \frac{BP}{B_1P} = \frac{CP}{C_1P} = \frac{DP}{D_1P}$ имеем

$$\frac{V}{V_{\mathrm{PBCD}}} = \frac{\mathrm{A}A_1}{A_1P} = \frac{AP + A_1P}{A_1P} = 1 + \frac{AP}{A_1P} = r + 1.$$

Аналогичные соотношения верны и для других тетраэдров так, что

$$\frac{V}{V_{\mathrm{PBCD}}} = \frac{V}{V_{\mathrm{PACD}}} = \frac{V}{V_{\mathrm{PABD}}} = \frac{V}{V_{\mathrm{PABC}}} = r + 1 \text{ или}$$

$$V = (r+1)V_{\mathrm{PBCD}} = (r+1)V_{\mathrm{PACD}} = (r+1)V_{\mathrm{PABD}} = (r+1)V_{\mathrm{PABC}}.$$

Тогда

$$r + 1 = \frac{(r+1)V_{\mathrm{PBCD}} + (r+1)V_{\mathrm{PACD}} + (r+1)V_{\mathrm{PABD}} + (r+1)V_{\mathrm{PABC}}}{V_{\mathrm{PBCD}} + V_{\mathrm{PACD}} + V_{\mathrm{PABD}} + V_{\mathrm{PABC}}}$$

или

$$r + 1 = \frac{4V}{V_{\mathrm{PBCD}} + V_{\mathrm{PACD}} + V_{\mathrm{PABD}} + V_{\mathrm{PABC}}} = \frac{4V}{V} = 4$$

Таким образом, $r = 3$.

**Отметим, что для решения этой задачи вовсе не обязательно знать формулу для объема тетраэдра. Достаточно ввести условную величину V = S h, и воспользоваться ее аддитивностью (известный факт из курса математики и физики).*

Рекомендации к оцениванию решений.

Изложено верное решение для частного случая – 2 балла.

Представлено разбиение исходного тетраэдра ABCD на тетраэдры PBCD, PACD, PABD и PABC и получены соотношения вида $\frac{V}{V_{\mathrm{PBCD}}} = \frac{\mathrm{A}A_1}{A_1P} = \frac{AP + A_1P}{A_1P} = 1 + \frac{AP}{A_1P} = r + 1$- не менее 3 баллов.

Отметим, что задачу можно решить векторным методом.