Условия и решения задач
(муниципальный этап олимпиады 2022 г.)

11 класс

1. Может ли один из углов треугольника (x) удовлетворять уравнению: $\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{3}$?

Решение. Найдем возможные значения x из данного уравнения. Для этого преобразуем его:

$\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{3} = -2\sin\frac{5x}{12}\sin\frac{x}{12} = 0$.

Тогда возможны варианты:

$\sin\frac{5x}{12} = 0$ или $\frac{5x}{12} = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и наименьшее положительное значение $x = \frac{12}{5}\pi > \pi$, что невозможно для угла треугольника.

$\sin\frac{x}{12} = 0$ или $\frac{x}{12} = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и наименьшее положительное значение $x = 12\pi > \pi$, что также невозможно для угла треугольника.

Ответ: не может.

2. Из множества $\{ 10; 11; 12; ...; 19 \}$ выбрали 5 различных чисел, а из множества $\{ 90; 91; 92; ...; 99 \}$ также выбрали 5 разных чисел. Оказалось, что разность любых двух чисел из десяти выбранных не кратна 10. Найдите сумму всех 10 выбранных чисел.

Решение. Очевидно, что у всех выбранных чисел разные последние цифры. Поэтому сумму можно найти, если отдельно добавить десятки и единицы этих чисел. Среди десятков есть пять по 10 и еще пять по 90, поэтому сумма десятков равна $5 \cdot 10 + 5 \cdot 90 = 500$. А среди единиц имеем каждую цифра ровно один раз, поэтому их сумма равна: $0 + 1 + 2 + ... + 9 = 45$. Таким образом, сумма всех десяти чисел равна 545.

Ответ: 545.

3. Существует ли такое натуральное число n, для которых оба числа $\frac{2n-5}{9}$ и $\frac{n-2}{15}$ являются целыми?

Решение. Допустим методом от противного, что такое n существует, тогда обозначим полученные целые числа как $m = \frac{2n-5}{9}$ и $k = \frac{n-2}{15}$, тогда из первого равенства $2n = 9m + 5$, и $n = 15k + 2$ со второго. Тогда $2n = 9m + 5 = 30k + 4$ или $9m + 1 = 30k$, что противоречит делимости на 3.

Ответ: такого натурального числа не существует.

4. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Окружности S_1, S_2, S_3, S_4 с центрами в точках O_1, O_2, O_3, O_4 и радиусами r_1, r_2, r_3, r_4 вписаны в треугольники AOB, BOC, COD, DOA, соответственно. Докажите утверждение:

а) $2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \le \left(2 - \sqrt{2}\right)(AC + BD)$;

б) $O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_4 + O_4O_1 \le 2\left(\sqrt{2} - 1\right)(AC + BD)$.

Решение. а) Используем известную формулу для радиуса вписанной окружности для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c: $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$ (рис. 1).

$$2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \le 2(OA + OB + OC + OD) - (AB + BC + CD + DA) =$$
$$= 2(AC + BD) - (AB + BC + CD + DA) =$$
$$= 2(AC + BD) - \sqrt{OA^2 + OB^2} - \sqrt{OB^2 + OC^2} - \sqrt{OC^2 + OD^2} - \sqrt{OD^2 + OA^2} \le$$
$$= 2(AC + BD) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(OA + OB + OB + OC + OC + OD + OD + OA) \le \left(2 - \sqrt{2}\right)(AC + BD).$$

б) из теоремы Пифагора имеем, что $O_1O_2^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 = 2(r_1^2 + r_2^2) \Rightarrow$

$$O_1O_2 + \ldots = \sqrt{2}\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2} + \ldots\right) \le \sqrt{2}\left((r_1 + r_2) + \ldots\right) \le 2\left(\sqrt{2} - 1\right)(AC + BD),$$

последний переход использует пункт а).
Что и требовалось доказать.

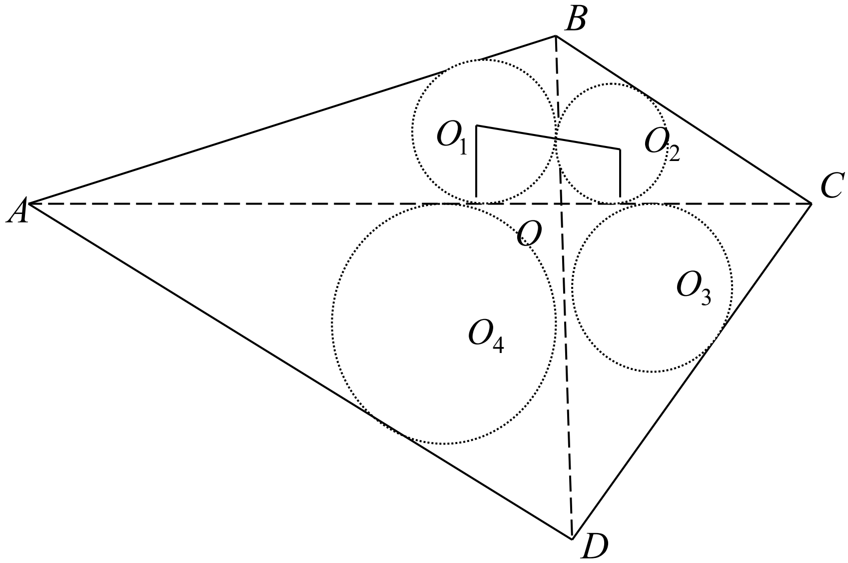

Рис. 1

5. Функция y = *f*(*x*) удовлетворяет следующие условия:

а) $f(4) = 2$;

б) $f(n+1) = \frac{1}{f(0)+f(1)} + \frac{1}{f(1)+f(2)} + \ldots + \frac{1}{f(n)+f(n+1)}, \ n \ge 0.$

Найдите значение *f*(2022).

Решение. Для произвольного $n \ge 0$ $f(n+2) - f(n+1) = \frac{1}{f(n+2)+f(n+1)}$, откуда $f^2(n+2) = f^2(n+1) + 1$. Используя условие $f(4) = 2$, получим:

$$4 = f^2(4) = f^2(3) + 1 \Rightarrow f(3) = \sqrt{3};$$
$$3 = f^2(3) = f^2(2) + 1 \Rightarrow f(2) = \sqrt{2};$$
$$2 = f^2(2) = f^2(1) + 1 \Rightarrow f(1) = 1;$$
$$1 = f(1) = \frac{1}{f(0)+f(1)} = \frac{1}{f(0)+1} \Rightarrow f(0) = 0.$$

С помощью метода математической индукции покажем, что $f(n) = \sqrt{n}$. База индукции доказана выше. Индукционный переход осуществим, воспользовавшись соотношением $f^2(n+2) = f^2(n+1) + 1$:

$$f^2(n+2) = f^2(n+1) + 1 = (n+1) + 1 = n + 2 \Rightarrow f(n+2) = \sqrt{n+2}.$$

Нетрудно показать и то, что функция действительно удовлетворяет условие задачи: если, $\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$ то

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \frac{n+2+\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \sqrt{n+2}.$$

Итак, $f(2022) = \sqrt{2022}$

Ответ: $\sqrt{2022}$