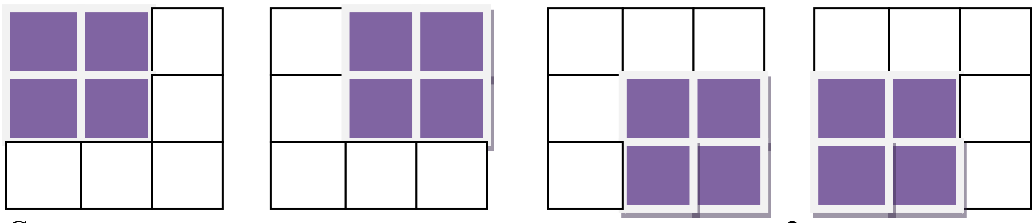
Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по МАТЕМАТИКЕ (2022 - 2023 уч. год)

11 класс

1. Сначала в каждую клетку таблицы 3×3 вписан ноль. За один ход разрешается выбрать квадрат 2×2 и к каждому числу в его клетках добавить 1. Старые числа при этом стираются, а вместо них записываются полученные. Можно ли за несколько таких ходов получить таблицу только из простых и попарно различных чисел? Ответ объяснить.
Варианты выбора квадратов 2×2 показаны на рисунке.



Среди простых чисел только одно четное число 2, остальные – нечетные. Для совершаемого хода можно выделить три положения числа: в центре, в угловой клетке, в клетке на середине стороны. При этом сумма всех чисел в угловых клетках равна числу в центре таблицы, а сумма чисел в угловых клетках, прилежащих к одной стороне, равна числу в середине этой стороны.
Тогда если по углам таблицы записаны нечетные числа, то в центре должно быть четное число. Однако сумма четырех простых чисел не может равняться двум.
Если двойка стоит в угловой клетке, то в других угловых клетках нечетные числа, а в серединах сторон на отмеченных на рисунке клетках окажутся четные числа (н – нечетное, ч – четное), т.е. не будут простыми.

2		н
		ч
н	ч	н

Двойка не может находиться на середине стороны, поскольку является наименьшим простым числом, и поэтому не может являться суммой других простых чисел.
Поэтому среди чисел на доске двойки нет, то есть все числа нечетные, что также невозможно, поскольку сумма всех чисел в угловых клетках, равная числу в центре таблицы, будет четным числом.
Таким образом, нельзя.

Критерии оценивания
Только верный ответ – 0 баллов.
Замечено, что сумма всех чисел в угловых клетках равна числу в центре таблицы, а сумма чисел в угловых клетках, прилежащих к одной стороне, равна числу в середине этой стороны – 3 балла.
Также рассмотрены три случая положения двойки: 1) в центре таблицы, 2) в угловой клетке, 3) в клетке на середине стороны, и случай отсутствия двойки среди чисел таблицы и по каждому случаю показано, что он невозможен – добавляется еще 4 балла, по одному баллу за каждый случай.
Таким образом, верное и полное решение оценивается в 7 баллов.

2. Сколько целочисленных решений (x, y) имеет неравенство $|x| + |y| < n$?

Решение

Графическая интерпретация неравенства - внутренняя часть квадрата (без границы) со сторонами на прямых $x + y = n,\ -x + y = n,\ x - y = n,\ -x - y = n$. Стороне, лежащей на прямой $x + y = n$, соответствует n+1 точка с целочисленными координатами, стороне, лежащей на прямой $-x + y = n$, соответствует n+1 точка с целочисленными координатами, одна из которых принадлежит на стороне, лежащей на прямой $x + y = n$, поэтому считаем n точек. Следующая прямая добавляет еще n точек, четвертая прямая - n-1 точку. Таким образом, на сторонах квадрата оказывается 4n точек. На сторонах ближайшего внутреннего квадрата - 4(n-1) точка. Началу координат - 1 точка. суммарное количество точек 1+4*1+4*2+….+4*(n-1)=1+2(n-1)n.

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Решение начато, осуществляется подсчет решений (аналитически или графически), но решение не доведено до ответа - 1-3 балла в зависимости от продвижения.

Ответ получен, но имеется одна или несколько ошибок в подсчете количества точек - 4-6 баллов.

Полное и верно обоснованное решение задачи - 7 баллов.

3. Три мотоциклиста стартуют одновременно из одной точки кольцевого шоссе в одном направлении. Первый мотоциклист впервые догнал второго, сделав 4,5 круга после старта, а за 30 минут до этого он впервые догнал третьего мотоциклиста. Второй мотоциклист впервые догнал третьего через три часа после старта. Сколько кругов в час делает первый мотоциклист?

Решение

Пусть *x, y, z* кругов в час скорости первого, второго и третьего мотоциклистов.

Выразим различными способами время за которое первый мотоциклист догонит второго, первый - третьего и второй третьего.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{4{,}5}{x}, \\ \dfrac{1}{x-z} = \dfrac{4{,}5}{x} - \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{y-z} = 3 \end{cases}$$

Решая систему уравнений получаем ответ *x*=3.

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Получены отдельные выражения для времени отдельных мотоциклистов -1 балл.

Верно составлены одно, два или три уравнения системы или, если был выбран другой способ решения, в зависимости от продвижения в решении - 2-4 балла.

Решение задачи завершено, но содержит одну или две арифметические ошибки, в результате которых получен неверный ответ - 5-6 баллов.

Обоснованно получен верный ответ - 7 баллов.

4. Выразите сумму 8+88+888+8888+…+8…8 через n, если последнее слагаемое в своей записи содержит n раз цифру восемь.

Решение

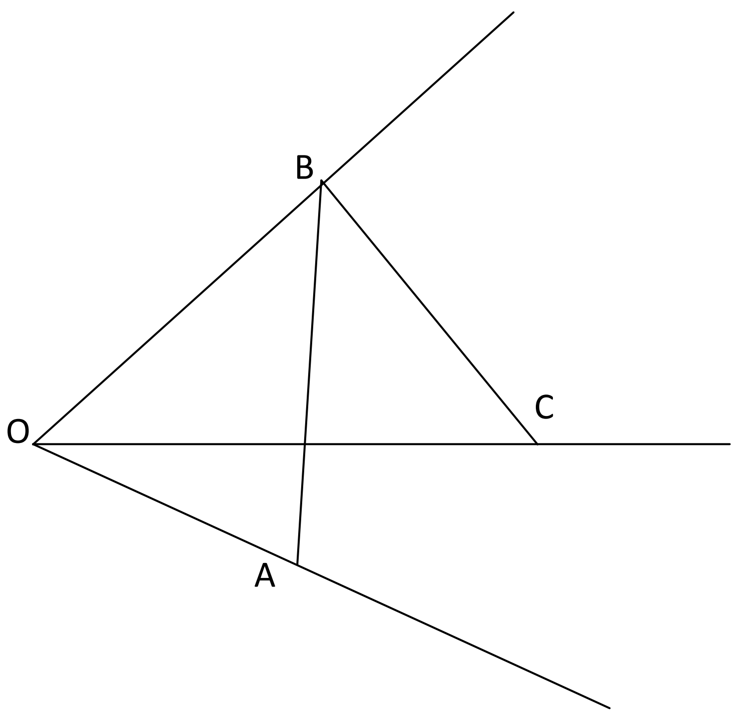
8+88+888+8888+…+8…8=8(1+11+111+…+1…1)
Заметим, что

$$10-1=9*1,$$
$$100-1=9*11,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$10^n-1=9*1\ldots1,$$

Тогда $\frac{8}{9}\left(\frac{10\times10^n-10}{9}-n\right)=\frac{8}{81}(10^{n+1}-10-9n)$.

Критерии оценивания
Только верный ответ – 0 баллов.
Предложен способ подсчета суммы и выполнены отдельные выкладки - 1-2 балла в зависимости от продвижения по задаче.
Указан способ подсчета суммы, но допущены ошибки при составлении выражений 3-5 баллов.
Обоснованно получен верный ответ - 7 баллов.

5. Из вершины O выходят три луча OA, OB и OC, не лежащие в одной плоскости, так, что углы AOB и BOC равные и острые. Докажите, что если угол AOC тупой и прямая OB не перпендикулярна плоскости AOC, то двугранный угол, образованный плоскостями AOB и BOC при ребре OB тупой.
Решение



Пусть $\angle AOB=\angle BOC=\alpha, \angle AOC=\beta, OB=a.$

Строим AB перпендикулярно OB и BC перпендикулярно OB. Угол ABC - плоский, соответствующий двугранному углу, образованному плоскостями AOB и BOC при ребре OB.
Пусть $\angle \mathrm{ABC} = \gamma$.
Тогда из равных прямоугольных треугольников AOB и COB имеем $\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = \frac{a}{cos\alpha}$, $AB = BC = a \times tg\alpha$.
Из треугольника AOC по теореме косинусов

$$\mathrm{AC}^2 = \left(\frac{a}{cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{a}{cos\alpha}\right)^2 - 2 \times \frac{a}{cos\alpha} \times \frac{a}{cos\alpha} \times cos\beta \qquad (1)$$

Из треугольника ABC по теореме косинусов

$$\mathrm{AC}^2 = (a \times tg\alpha)^2 + (a \times tg\alpha)^2 - 2 \times a \times tg\alpha \times a \times tg\alpha \times cos\gamma \qquad (2)$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (2) и преобразовывая полученное равенство, получаем

$$cos\beta = 1 - sin^2\alpha + sin^2\alpha \times cos\gamma$$

В ходе преобразований обе части равенства (1) были умножены на $cos^2\alpha$ с учетом условия, что угол AOB не является прямым. Если углы AOB и BOC - прямые, то прямая OB перпендикулярна плоскости ABC, что противоречит условию.
Так как по условию $90 < \beta < 180$, то $cos\beta < 0$. Значит,

$$1 - sin^2\alpha + sin^2\alpha \times cos\gamma < 0$$

$$cos\gamma < -ctg^2\alpha$$

В ходе преобразований обе части неравенства были умножены на $\frac{1}{sin^2\alpha}$ с учетом условий, что $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 180^\circ$ и $\frac{1}{sin^2\alpha} > 0$.
Поскольку $cos\gamma < 0$, то угол ABC тупой.

Критерии оценивания
Верное и полное решение - 7 баллов.
Верное получены равенства (1) и (2), но дальнейшее решение отсутствует, либо не приводит к доказательству утверждения, сформулированного в задаче, либо содержит ошибки, которые не позволяют получить условие об отрицательности $cos\gamma$ - 2 балла.
Если в обосновании выписываемых соотношений отсутствуют ссылки на использование соотношений в прямоугольном треугольнике, на использование теоремы косинусов, то баллы не снижаются.