РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА

Задача 1. *Высота Эйфелевой башни в Париже — 324 м, ее вес — 8000 т., она сделана целиком из стали. Какой высоты будет точная модель башни весом 1 кг из такой же стали?*

Ответ. 1,62 м. ***Решение.*** Линейные размеры подобных фигур относятся как кубические корни из их объёмов. Так как материалы башни и модели одинаковы, то это отношение совпадает с отношением кубических корней весов модели и башни, равным 1:200. Таким образом, высота модели будет равна 324:200 = 1,62 м.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*. При верном ходе решения из-за арифметических/алгебраических ошибок получен неверный ответ — *4 балла*.

Задача 2. *Есть 22 батарейки, из которых 15 заряжены, а 7 разряжены. Фотоаппарат работает от трёх заряженных батареек. Можно вставить в него любые три батарейки и проверить, работает ли он. Как за 10 таких попыток гарантированно включить фотоаппарат?*

Решение. Пронумеруем батарейки: 1, 2,… , 22. Первыми шестью испытаниями будем вставлять в фотоаппарат батарейки 1,2,3; 4,5,6; …, 16,17,18.. Если хотя бы одна тройка включит фотоаппарат — всё в порядке. Если нет, то среди первых 18 батареек хотя бы 6 разряженных, значит, среди четырёх последних — не более одной разряженной. Четырьмя следующими испытаниями перепробуем все тройки оставшихся батареек: 19,20,21; 19,20,22; 19,21,22; 20,21, 22 — и обязательно найдем тройку заряженных.

♦ См. также задачу 1 для 10 класса.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*.

Задача 3. *Острые углы α_1, α_2, α_3 таковы, что $\sin\alpha_1 = \cos\alpha_2$, $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_3$, $\sin\alpha_3 = \cos\alpha_1$. Докажите, что все эти углы равны 45°.*

Решение. См. решение задачи 3 для 10 класса.

• Отсутствие ссылки на монотонность синуса и косинуса на отрезке от 0° до 90° в обоснование равенства $\alpha_2 = 90° – \alpha_1$ и ему подобных *не штрафуется*.

Задача 4. *Существуют ли в пространстве шесть точек, расстояния между которым принимают только два различных значения?*

Ответ. Существуют. ***Решение.*** Достаточно взять центры граней куба. Расстояние между центрами противоположных граней равно ребру куба, а между центрами соседних граней — ребру куба, деленному на корень из 2.

• За ответ «существуют» без обоснования — *0 баллов*.

Задача 5. *Внутри треугольника ABC даны две точки. Расстояния от одной из них до прямых AB, BC и AC равны соответственно 1, 3 и 15 см, а от другой — 4, 5 и 11 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.*

Ответ. 7 см. ***Первое решение.*** Пусть M_1 и M_2 — первая и вторая данные точки, а точка O такова, что точка M_2 — середина отрезка OM_1. Опустим перпендикуляры M_1N_1, M_2N_2 и ON_3 на прямую AB. Тогда отрезок M_2N_2 будет средней линией трапеции $ON_3N_1M_1$. Значит, $M_2N_2 = (ON_3+M_1N_1)/2 \Rightarrow 4 = (ON_3+1)/2$, откуда $ON_3 = 7$. Аналогично находим, что перпендикуляры OM_3 и OK_3 из точки O на прямые BC равен и AC соответственно также равны 7. Таким образом, точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC, имеющей радиус 7. ***Второе решение.*** Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Тогда $3a + 15b + c = 5a + 11b + 4c = r(a + b + c) = 2S_{ABC}$. Из первого равенства получаем $a = (4b – 3c)/2$. Подставляя найденное a во второе равенство $5a + 11b + 4c = r(a + b + c)$, находим $r = 7$.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*.

Задача 6. *На доске написано пять «уравнений» вида $x^2+...x+... = 0$. Двое по очереди вписывают вместо многоточий натуральные числа от 1 до 10, причём каждое число можно использовать только один раз. Игра заканчивается, когда все числа вписаны. Тот, кто делает первый ход, хочет, чтобы в этот момент на доске было как можно меньше уравнений, имеющих по два различных корня, а его соперник — чтобы их было как можно больше. Какого наилучшего результата может добиться первый независимо от игры второго?*

Ответ. Первый может добиться, чтобы на доске в итоге оказалось не больше трёх уравнений, имеющих по два различных корня. Улучшить этот результат нельзя.
Решение. Чтобы создать два уравнения, не имеющих корней, первому достаточно двумя первыми ходами вписывать на место коэффициента перед x в «уравнении», куда ещё не вписано ни одного числа, наименьшее из ещё не вписанных чисел. Такое возможно, потому что если сделано не более двух пар ходов, то хотя бы один коэффициент вписан не более чем в четыре «уравнения». Пусть $x^2+px+q = 0$ — одно из уравнений, получившихся в конце игры, где коэффициент p вписан первым игроком на одном из двух первых ходов. Тогда, очевидно, $p \le 3$ и $q \ge p+1$, откуда $p^2-4q \ge p^2-4(p+1) = p(p-4)-4 < 0$, то есть уравнение не имеет корней.

Чтобы создать три уравнения, имеющие по два корня, второму достаточно разбить все числа от 1 до 10 на пары соседних: 1, 2; 3, 4; …, 9, 10 и в ответ на каждый ход первого вписывать на свободное место в «уравнении», куда первый этим ходом вписал число, второе число из той же пары. Тогда пары 5,6; 7,8; 9,10 дадут три искомых уравнения. В самом деле, пусть $x^2+px+q = 0$ — одно из уравнений, получившихся в конце игры, где коэффициенты p и q принадлежат одной из этих трёх пар. Тогда $p \le 5$ и $q \le p+1$, откуда $p^2-4q \ge p^2-4(p+1) = p(p-4)-4 \ge p-4 \ge 1 > 0$.

• Ответ без обоснования — *0 баллов*. Если есть стратегия только за одного из игроков, решение оценивается *из 4 баллов*: *по 2 балла* за описание стратегии и её обоснование.

ИСТОЧНИКИ И АВТОРЫ ЗАДАЧ

XII турнир математических флеш-боёв «Лига открытий», Казань, 2022: 6-4, 7-4.

По мотивам задачи с костромских олимпиад: 7-2, 9-2.

Районно-городской тур олимпиады Челябинской области 1999/2000 года: 9-1.

Районно-городской тур олимпиады Челябинской области 1998/1999 года: 11-5.

Третий Костромской городской турнир математических боев, 1998 (числовые данные изменены): 9-3.

Татарстан, олимпиада для 6 класса, финальный тур, 2014: 10-1.

Удмуртия, районный тур, 1979 г.: 11-1

Фольклор: 5-4 = 6.3, 11-4.

Остальные задачи составлены И.С. Рубановым специально для этой олимпиады.