

11 класс

1. Существует ли такое натуральное число n , большее 1, что значение

выражения $\sqrt{n}\sqrt{n}\sqrt{n}$ является натуральным числом?

Ответ: существует.

Решение. Например, $n=2^8$.

2. Какое наименьшее количество множителей требуется вычеркнуть из числа $99!$ ($99!$ - произведение всех чисел от 1 до 99) так, чтобы произведение оставшихся множителей оканчивалось на 2?

Ответ: 20.

Решение. Из числа $99!$ необходимо вычеркнуть все множители кратные 5, иначе произведение будет оканчиваться на 0. Всего таких множителей – 19.

Произведение оставшихся множителей оканчивается на 6. Действительно, произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ оканчивается на 6, аналогичные произведения в каждом следующем десятке также оканчиваются на 6. Следовательно, достаточно вычеркнуть ещё один множитель, например, 8. После этого произведение оставшихся множителей будет оканчиваться на 2.

3. Саша отметил несколько клеток таблицы 8×13 так, что в любом квадратике 2×2 оказалось нечетное число отмеченных клеток. Затем он отметил еще несколько клеток, в результате чего в каждом квадрате 2×2 стало четное число отмеченных клеток. Какое наименьшее суммарное число клеток могло быть отмечено Сашей?

Ответ: 48.

Решение. Пример см. рис. (цифра 1 стоит в клетках, отмеченных в первый раз, цифра 2 – во второй раз)

Оценка. В таблице можно разместить 24 независимых квадрата 2×2 . В первый раз в каждом из них была отмечена хотя бы одна клетка. Так как в каждом из них стало нечетное число отмеченных клеток, а после второго раза стало четное число клеток, то во второй раз так же в каждом из них была отмечена хотя бы одна клетка. Итого получаем минимум 48 отмеченных клеток.

	1		1		1		1		1		1		1	
	2		2		2		2		2		2		2	
	1		1		1		1		1		1		1	
	2		2		2		2		2		2		2	
	1		1		1		1		1		1		1	
	2		2		2		2		2		2		2	
	1		1		1		1		1		1		1	
	2		2		2		2		2		2		2	

4. При каких значениях x и y верно равенство $x^2 + (1 - y)^2 + (x - y)^2 = 1/3$?

Ответ: $x=1/3, y=2/3$.

Решение. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим

$$0 = 2x^2 + 2(1 - y)^2 + 2(x - y)^2 - 2/3 = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 4y + 4/3 = (2x - y)^2 + 3(y - 2/3)^2. \text{ Отсюда } 2x = y = 2/3.$$

5. Дана возрастающая последовательность натуральных чисел, в которой любые три подряд идущих числа образуют прогрессию — арифметическую или геометрическую. Известно, что первые два числа в последовательности делятся на 4. Докажите, что в последовательности нет простых чисел.

Решение. Рассмотрим три последовательных числа a, b, c . Пусть числа a и b делятся на простое число p .

Если они образуют геометрическую прогрессию, тогда $b^2 = a \cdot c$. Тогда b^2 делится на p , значит, и b делится на p . Получаем, что b и c делятся на p , то есть не взаимно просты.

Если они образуют арифметическую прогрессию, тогда $2b = a + c$, $c = 2b - a$ и делится на p .

Получаем, что b и c делятся на p , то есть не взаимно просты.

Отсюда следует, что любые соседние числа не взаимно просты. Тогда, если бы в последовательности было бы простое число, то следующее число должно быть ему равно, но последовательность возрастает.