Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2022/23 уч.г.
Математика, 11 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям

11.1. На тарелке лежат различные блины с тремя начинками: 2 с мясом, 3 с творогом и 5 с клубникой. Света последовательно все их съела, выбирая каждый следующий блин наугад. Найдите вероятность того, что первый и последний съеденные блины были с одной начинкой.
Ответ. $\frac{14}{45}$.
Решение. Два блина с одинаковой начинкой могут быть либо с мясом, либо с творогом, либо с клубникой. Посчитаем вероятности каждого из этих событий и сложим их. Упорядочим блины в порядке их съедания. Вероятность того, что первый блин с мясом, равна $\frac{2}{10}$. Вероятность того, что последний блин с мясом, равна вероятности того, что блин с мясом на любом другом месте. Следовательно, эта вероятность равна $\frac{1}{9}$, поскольку после выбора первого блина осталось всего 9 блинов, среди которых ровно один с мясом. Итак, вероятность того, что первый и последний блины с мясом, равна $\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{90}$. Аналогично найдём вероятность того, что первый и последний блин с творогом, она равна $\frac{3}{10}-\frac{2}{9}=\frac{6}{90}$. А вероятность того, что первый и последний блин с клубникой, равна $\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{20}{90}$. Следовательно, ответом задачи является число $\frac{2}{90}+\frac{6}{90}+\frac{20}{90}=\frac{28}{90}=\frac{14}{45}$.
Замечание. Вероятность того, что первый и последний блины с мясом, можно также считать следующим образом. Всего есть $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!}$ способов выложить наши 10 блинов в ряд, а среди них есть $\frac{8}{3!\cdot 5!}$ способов выложить их в ряд так, чтобы блины с мясом были в начале и в конце. Тогда вероятность того, что первый и последний блины с мясом, равна

$$\frac{\frac{8}{3!\cdot 5!}}{\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!}}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}.$$

Аналогичным образом можно посчитать вероятности и для блинов с другими начинками.
Комментарий. *Любое полное решение задачи – 7 баллов. В решении, аналогичном авторскому, но содержащем арифметические ошибки, следующие критерии суммируются: верно найдена вероятность*

того, что первый и последний блины с мясом – 2 балла; верно найдена вероятность того, что первый и последний блины с творогом – 2 балла; верно найдена вероятность того, что первый и последний блины с клубникой – 2 балла; найден верный ответ – 1 балл. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

11.2. Существует ли число вида $10000\ldots00001$, которое можно представить в виде суммы $a!+b!+c!$, где a, b, c – натуральные числа? (Факториалом натурального числа n называется произведение $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

Ответ. Не существует.

Решение. Каждое число $n!$ при $n \geq 2$ является чётным. Поэтому среди чисел a, b, c ровно одно равно 1 (все три не могут равняться 1, иначе сумма их факториалов будет равна 3). Пусть, например, $c = 1$. Тогда $a! + b! = 100\ldots00$. Если оба числа a и b не меньше трёх, то каждое слагаемое в сумме $a! + b!$ делится на 3, т.е. и их сумма делится на 3, что не так. Значит, хотя бы одно из этих двух чисел меньше 3. Пусть, например, $b = 2$, тогда $b! = 2$, поэтому $a! = 99\ldots998$. Последнее невозможно: выше было отмечено, что это число должно делиться на 3.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что ровно одно из чисел должно равняться 1-2 балла. Доказано, что еще одно число меньше 3 – 2 балла. Только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.3. Рассматриваются всевозможные квадратные трёхчлены вида $ax^2 + bx + c$, все коэффициенты a, b, c которых являются натуральными числами, не превосходящими 100. Каких трёхчленов среди них больше: имеющих хотя бы один действительный корень или не имеющих ни одного?

Ответ. Больше трёхчленов, не имеющих корней.

Решение. Найдем количество пар натуральных чисел (a, b), не превосходящих 100, в которых $b \geq 2a$. Для $a = 1$ имеем 99 пар с этим свойством: $(1, 2)$, $(1, 3)$, …, $(1, 100)$, для $a = 2$ их будет 97: $(2, 4)$, $(2, 5)$, …, $(2, 100)$ и т.д., для $a = 50$ – одна пара: $(50, 100)$, при $a > 50$ – ни одной. Значит, имеется ровно $99 + 97 + \cdots + 1 = 2500$ таких пар. Поэтому среди троек натуральных чисел (a, b, c), не превосходящих 100, ровно $2500 \cdot 100 = 250000$ троек, в которых $b \geq 2a$. Точно таким же будет и количество троек, в которых $b \geq 2c$. Следовательно, имеется не менее чем $100^3 - 2 \cdot 250000 = 500000$ троек (a, b, c), в которых $b < 2a$ и $b < 2c$. Для каждой такой тройки выполняется неравенство $b^2 - 4ac < 0$, означающее, что трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней.

Итак, 500000 трёхчленов не имеют действительных корней – это ровно половина от общего числа многочленов. Но в оставшейся половине есть многочлены, которые также не имеют корней, например, трёхчлен $2x^2 + 2x + 1$, для которых неравенство $b < 2c$ не выполнено. Значит, трёхчленов, не имеющих действительных корней, больше.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.4. Действительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = 2$ и $xy + yz + zx = 1$. Найдите наибольшее возможное значение величины $x - y$.

Ответ. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Избавимся от переменной z:

$$1 = xy + z(x + y) = xy + (2 - x - y)(x + y) = 2x + 2y - x^2 - y^2 - xy,$$

откуда

$$x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x + 2y.$$

Пусть $a = x + y$ и $b = x - y$, выразим всё через a и b:

$$a^2 - \frac{a^2 - b^2}{4} + 1 = 2a \iff 3a^2 + b^2 + 4 = 8a \iff b^2 = -3a^2 + 8a - 4.$$

Оценим величину $b^2 = -3a^2 + 8a - 4$ сверху:

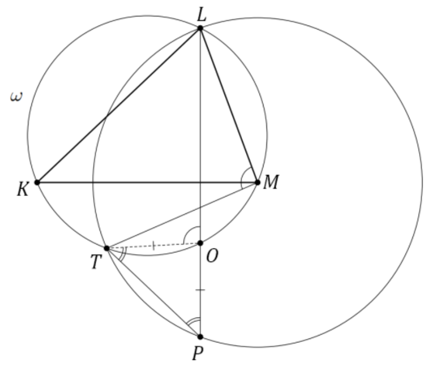
$$(-3a^2 + 8a - 4) - \frac{4}{3} = -3\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 \leq 0 \implies -3a^2 + 8a - 4 \leq \frac{4}{3}.$$

Отсюда следует, что $b^2 \le \frac{4}{3}$ и $x - y = b \le \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Также отметим, что значение $x - y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ достигается при $(x, y, z) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}; \frac{2-\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Действительно, в этом случае $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b^2 = -3a^2 + 8a - 4$, поэтому все неравенства, приведённые выше, обращаются в равенства.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Следующие критерии суммируются. Доказано, что* $x - y \le \frac{2\sqrt{3}}{3}$ *– 5 баллов; доказано, что существует тройка чисел* (x, y, z)*, удовлетворяющая условиям задачи, для которой* $x - y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ *– 2 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.5. Дан остроугольный треугольник KLM. Окружности с центрами K и M проходят через точку L, вторично пересекаются в точке P и пересекают описанную окружность ω треугольника KLM в точках S и T. Отрезок LP пересекает окружность ω в точке O. Докажите, что O – центр описанной окружности треугольника STP.

Решение. Докажем сначала, что $OT = OP$. Для этого не нужна окружность с центром в точке K. Рассмотрим чертеж без неё. Пусть в окружности с центром M центральный угол LMT равен 2α. Тогда вписанный угол TPL равен α. В окружности ω углы LMT и LOT – вписанные и опираются на одну дугу, значит, $\angle LOT = \angle LMT = 2\alpha$. Угол LOT – внешний угол треугольника TOP. Следовательно, $\angle OTP = \angle LOT - \angle OPT = \alpha$, то есть треугольник TOP – равнобедренный: $OT = OP$. Аналогично, рассмотрев окружность с центром K, докажем, что $OP = OS$. Следовательно, O – центр описанной окружности треугольника STP.



Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*