Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

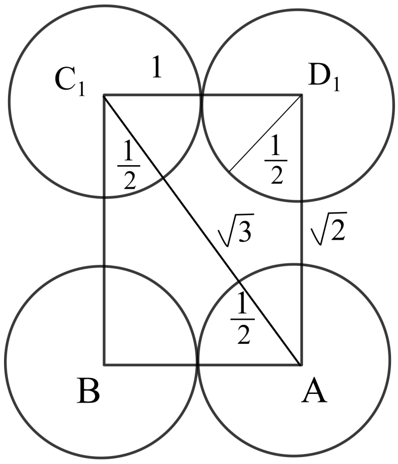
2022-2023 уч.год

11 класс

Решения и ответы

1. В каждой из вершин куба, ребро которого равно 1, находится центр шара. Все шары одинаковы, и каждый касается трех соседних шаров. Найдите длину той части пространственной диагонали куба, которая лежит вне шаров.

   Решение. Рассмотрим два шара, центры которых лежат в вершинах одного ребра. Так как шары имеют одинаковый радиус и касаются друг друга, то радиус каждого шара равен $\frac{1}{2}$. Рассмотрим сечение ABC_1D_1. Это сечение содержит диагональ AC_1, каждый шар отсекает от этой диагонали отрезок длины $\frac{1}{2}$. Диагональ куба имеет длину $\sqrt{3}$, поэтому длина отрезка диагонали, лежащая вне шаров, равна $\sqrt{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\sqrt{3}-1$.

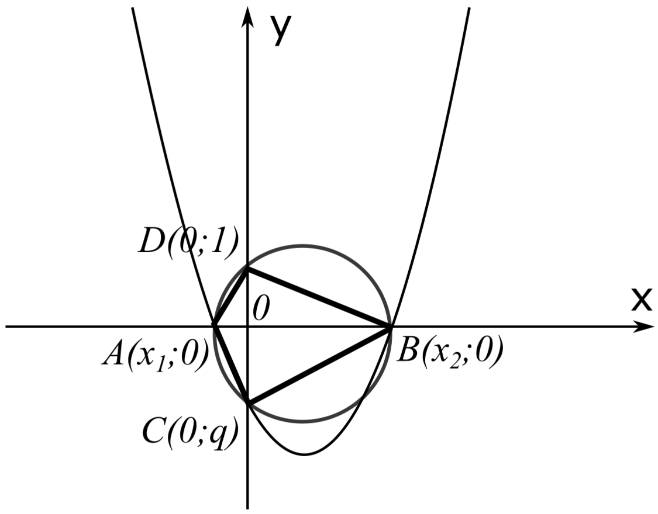
   Ответ. $\sqrt{3}-1$.

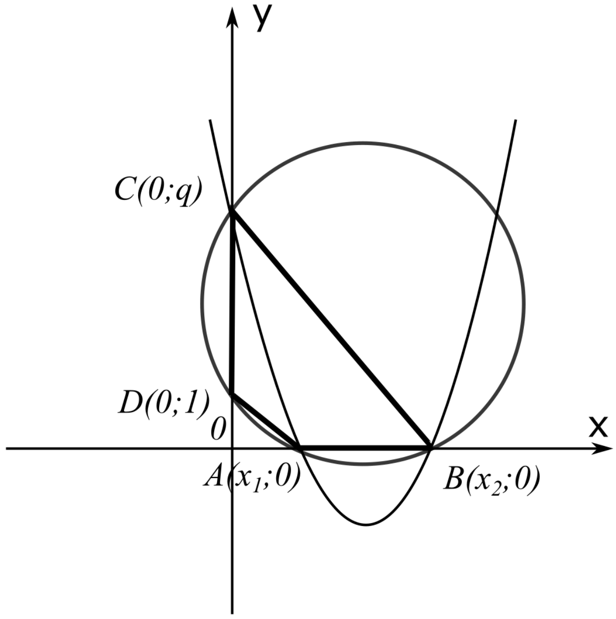
2. На шахматную доску поставили некоторое количество белых и черных пешек. Число белых пешек больше, чем число черных пешек. Число пешек, стоящих на черных клетках, меньше числа пешек, стоящих на белых клетках. Докажите, что найдется по крайней мере одна белая пешка, стоящая на белой клетке.

   Решение. Докажем от противного. Пусть на белых клетках стоят только черные пешки. Тогда число черных пешек больше числа всех пешек, стоящих на черных клетках, а это число не меньше числа белых пешек (мы предположили, что белые пешки стоят только на черных клетках, и некоторые черные поля могут быть заняты черными пешками). Мы получили, что число черных пешек больше числа белых пешек, а это противоречит условию.

3. Парабола
   $$f(x)=x^2+px+q$$
   пересекает координатные оси в трех различных точках. Назовем эти точки пересечения с осями A, B, C. Пусть точка D имеет координаты $D(0;1)$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки A, B, C, D.

   Решение. По условию задачи, функция $f(x)=x^2+px+q$ имеет два корня x_1, x_2. Обозначим точки пересечения параболы с осями так: $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$, $C(0;q)$. Необходимо рассмотреть два случая. Первый случай: $q<0$, точка C лежит ниже оси OX,





начало координат O находится внутри четырехугольника $ACBD$. По теореме Виета $|x_1| \cdot |x_2| = |q|$, т.е.$|x_1| \cdot |x_2| = |q| \cdot 1$. Это означает, что произведения длин отрезков равны: $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Поэтому прямоугольные треугольники OAC и OBD подобны. Отсюда равны углы $\angle ACD = \angle ABD$, из этого следует, что четырехугольник $ACBD$ – вписанный. Решение можно также получить с применением теоремы, обратной к теореме об отрезках пересекающихся хорд.

Второй случай: $q > 0$, точка C лежит выше оси OX, начало координат O находится вне четырехугольника $ABCD$. Аналогично первому случаю, $|x_1| \cdot |x_2| = |q| = |q| \cdot 1$. Прямоугольные треугольники AOD и BOC подобны. В этом случае равны углы $\angle OAD = \angle OCB$, поэтому в четырехугольнике сумма углов $\angle DAB$ и $\angle CBD$ равна $180°$, и четырехугольник – вписанный.

4. Пусть a, b – длины катетов, c – длина гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажите, что

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} < \sqrt{2} + 2$$

Решение. Преобразуем, несколько раз используя соотношение $a^2 + b^2 = c^2$

$$c^3 - a^3 - b^3 = c \cdot c^2 - a^3 - b^3 = ca^2 + cb^2 - a^3 - b^3 =$$

$$= a^2(c-a) + b^2(c-b) = (c^2 - b^2)(c-a) + (c^2 - a^2)(c-b) =$$

$$= (c-a)(c-b)(c+b+c+a) = (c-a)(c-b)(2c+a+b)$$

С учетом этого упрощения, требуется доказать неравенство

$$c < a + b < \sqrt{2}c$$

Левая часть – это известное неравенство треугольника.
Докажем правую часть

$$a + b < \sqrt{2}c \Leftrightarrow (a+b)^2 < 2c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 2c^2 \Leftrightarrow 2ab < c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ab < a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 > 0$$

Неравенство доказано.

5. Компьютер сгенерировал несколько различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел он выяснил, на какую наибольшую степень числа 2022 делится их разность. Вариант, что разность делится только на нулевую степень, тоже возможен. Оказалось, что разных ответов у компьютера получилось 2023. Какое наибольшее количество чисел мог сгенерировать компьютер?

   Решение.
   Пример. Один из возможных наборов – все числа от 1 до 2022^{2023}. Разность любых из них делится на 2022 не более, чем в степени 2022, при этом все степени от 0 до 2022 присутствуют.
   Оценка. Докажем, что большее количество чисел подобрать не получится. Представим каждое число a в виде разложения по степеням 2022

$$a = a_{2023} \cdot 2022^{2023} + a_{2022} \cdot 2022^{2022} + a_{2021} \cdot 2022^{2021} + \ldots + a_k \cdot 2022^k + \ldots + a_1 \cdot 2022 + a_0$$

   Здесь каждый коэффициент a_k меняется от 0 до 2022 ($k \leq 2022$). (Если рассматривать пример, написанный выше, то a_{2023} – 0 или 1 при всех остальных $a_k = 0$.) Напишем другое число b

$$b = b_{2023} \cdot 2022^{2023} + b_{2022} \cdot 2022^{2022} + b_{2021} \cdot 2022^{2021} + \ldots + b_k \cdot 2022^k + \ldots + b_1 \cdot 2022 + b_0$$

   Разность этих чисел делится на 2022^p тогда и только тогда, когда p – это наименьший разряд, в котором числа a и b различаются. Т.е. если $a_{p-1} = b_{p-1},\ a_{p-2} = b_{p-2},\ \ldots a_1 = b_1,\ a_0 = b_0,\ a_p \neq b_p$, то разность $a - b$ делится на 2022^p.
   Предположим, что сгенерировано больше, чем 2022^{2023} чисел a, представленных в указанной форме. Допустим даже, что существуют слагаемые со степенями, большими 2023. Выберем 2023 слагаемых, соответсвующие всем 2023 степеням, на которые делится разность (по условию). Число различных чисел, отличающихся в этих слагаемых коэффициентами a_k, равно 2022^{2023} (по 2022 для каждого k). Так как сгенерировано количество чисел, большее 2022^{2023}, то найдутся два числа, у которых во всех выбранных слагаемых стоят одинаковые коэффициенты a_k. Но в этом случае мы получим еще какую-то степень числа 2022, которая входит в набор степеней делимости. Т.е. получили больше, чем 2023 степени, а это противоречит условию.