11 класс

11.1. Можно ли разрезать куб 40×40×40 на прямоугольные параллелепипеды такие, что у каждого из них длина, ширина и высота в некотором порядке являются последовательными нечетными числами?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина, ширина и высота параллелепипеда являются тремя последовательными нечетными числами, то это означает, что одна из этих величин – число, делящееся на 3. Поэтому объем каждого параллелепипеда разрезания будет делиться на 3. Значит, и сумма объемов параллелепипедов разрезания также будет делиться на 3. Но эта сумма должна равняться объему куба с ребром 40, то есть числу не делящемуся на 3. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

11.2. Известно, что $\frac{1}{\cos(2022x)}+\operatorname{tg}(2022x)=\frac{1}{2022}$.

Найдите $\frac{1}{\cos(2022x)}-\operatorname{tg}(2022x)$.

Ответ. 2022.

Решение.

Рассмотрим произведение $\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$. Поэтому искомое выражение равно 2022.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

11.3. Рассматривается квадратный трехчлен $P(x)=ax^2+bx+c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также корни трехчлена $Q(x)=cx^2+bx+a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных четырех чисел?

Ответ. 5.

Решение. Пусть у трехчлена $P(x)$ корни $x_1, x_2>0$. Тогда у трехчлена $Q(x)$ корнями будут числа $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$.

Сумма чисел, выписанных на доску, есть $S=x_1+x_2+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. Для положительного k верно неравенство $k+\frac{1}{k}\geq 2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $k=1$. Поэтому $S\geq 4$. Но $S=4$, только если $x_1=x_2=1$. Но по условию x_1, x_2 различные. Поэтому S>4. Значит, наименьшее возможное целое значение S равно 5. Такая ситуация возможна. Пусть $x_1 = 1$, а x_2 – такое число, что $x_2 + \frac{1}{x_2} = 3$. Тогда трехчлен с корнями x_1, x_2 – искомый.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Замечено, что у трехчлена $Q(x)$ корнями являются числа $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ – 2 балла.
Доказано, что сумма четырех чисел не меньше 4 – 2 балла.
Доказано, что сумма четырех чисел больше 4 – еще 1 балл.
Доказано, что сумма четырех чисел может равняться 5 – 2 балла.

11.4. По кругу выписано 101 целое ненулевое число так, что каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди этих 101 выписанного числа?

Ответ. 67.

Решение. Рассмотрим любые 3 подряд идущих числа. Все они не могут быть отрицательными. Среди них есть положительное. Зафиксируем его и его соседа (это число может быть отрицательным), а остальные 99 разобьем на 33 тройки подряд идущих чисел. В каждой такой тройке будет не более двух отрицательных чисел. Таким образом, общее количество отрицательных чисел не более 1+2·33=67. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Пусть положительными будут числа с номерами 1, 4, 7, 10, …, 100, а остальные – отрицательными. Несложно проверить, что если все положительные числа равны 5, а отрицательные равны –2, то каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел.
Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что отрицательных чисел не больше 67 – 4 балла.
Приведен пример с 67 отрицательными числами – 3 балла.

11.5. Боковые грани пятиугольной пирамиды *SABCDE* – остроугольные треугольники. Назовем боковое ребро пирамиды *хорошим*, если оно равно высоте противоположной боковой грани, проведенной из вершины пирамиды (например, ребро *SA* – хорошее, если оно равно высоте треугольника *SCD*, проведенной из вершины *S*). Какое наибольшее количество хороших ребер может иметь пирамида?

Ответ. 2.

Решение. Покажем, что два боковых ребра, не являющихся соседними ребрами пирамиды, не могут быть одновременно хорошими. Пусть это не так, и, например, ребра *SA* и *SC* являются хорошими, то есть $SA = SP$ – высоте грани *SCD*, и $SC = SQ$ – высоте грани *SAE*. Но, по свойству высоты остроугольного треугольника, $SP < SC$, и $SQ < SA$. Тогда $SA = SP < SC = SQ < SA$ – противоречие.
Теперь заметим, что среди трех боковых ребер пятиугольной пирамиды всегда найдутся два несоседних ребра. Значит, пирамида может иметь не более двух хороших ребер.
Покажем, что существует пятиугольная пирамида с двумя хорошими боковыми ребрами.
Рассмотрим квадрат *AMNE* с центром *O*. Пусть в плоскости *AMN* прямая, проходящая через вершину *M* перпендикулярно *EM*, и прямая, проходящая через вершину *N* перпендикулярно *AN*, пересекаются в точке *C*. Точки *B* и *D* выберем так, что точки *M* и *N* – соответственно середины отрезков *BC* и *DC*. Выберем произвольно точку *S* на перпендикуляре к плоскости *ABC*, проходящем через точку *O*. Тогда, в силу теоремы о

трех перпендикулярах, SM и SN – высоты треугольников SBC и SDC. И, как следует из равнобедренности треугольников ESM и ASN, ребра SE и SA – хорошие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что пирамида не может иметь более 2 хороших ребер – 4 балла.
Приведен пример пирамиды с 2 хорошими ребрами – 3 балла.