МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

Задания для обучающихся

Время выполнения заданий – 235 минут

Максимальное количество баллов – 42

Написать только ответ — мало! Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!

1. Буратино вышел из дома папы Карло и пришёл на Поле Чудес ровно в 22:00. Если бы скорость, с которой он шёл, была на 25% больше, то он пришёл бы в 21:30. В какое время он вышел из дома?

2. Сравните два числа: $\sqrt{3}\sin 10^\circ$ и $\sin 80^\circ$.

3. Существуют ли положительные числа a, b, c такие, что числа d и $\sqrt{d}$ являются соответственно корнями уравнений $ax^2+bx-c=0$ и $\sqrt{a}\,x^2+\sqrt{b}\,x-\sqrt{c}=0$?

4. Трехзначное число, все цифры которого различны и отличны от нуля, назовем *сбалансированным*, если оно равно сумме всевозможных двузначных чисел, составленных из различных цифр этого числа. Найдите наименьшее сбалансированное число.

5. Три окружности с радиусами 1, 2, 3 попарно касаются друг друга внешним образом в трех точках. Найдите радиус окружности, проходящей через эти три точки.

6. Существуют ли 2022 последовательных натуральных чисел, среди которых есть ровно 22 простых числа?

Материалы для членов жюри (ключи, критерии оценивания)

1. Буратино вышел из дома папы Карло и пришёл на Поле Чудес ровно в 22:00. Если бы скорость, с которой он шёл, была на 25% больше, то он пришёл бы в 21:30. В какое время он вышел из дома?

Ответ: в 19:30.

Решение: Если Буратино потратил t (ч) на свой путь, то с увеличенной скоростью он потратил бы в 1,25 меньше, т.е. $\frac{4}{5}t$. Значит, он сэкономил бы $\frac{1}{5}t$, что составило бы 30 мин. Следовательно, на дорогу до Поля Чудес он потратил 2,5 часа, а вышел из дома в 19:30.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

2. Сравните два числа: $\sqrt{3}\sin 10^\circ$ и $\sin 80^\circ$.

Ответ: второе больше.

Решение: Рассмотрим разность первого и второго чисел:

$$\sqrt{3}\sin 10^\circ - \sin 80^\circ = \sqrt{3}\sin 10^\circ - \cos 10^\circ = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ - \frac{1}{2}\cos 10^\circ\right) =$$

$$= 2(\cos 30^\circ \sin 10^\circ - \sin 30^\circ \cos 10^\circ) = 2\sin(10^\circ - 30^\circ) = -\sin 20^\circ < 0.$$

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

3. Существуют ли положительные числа a, b, c такие, что числа d и $\sqrt{d}$ являются соответственно корнями уравнений $ax^2 + bx - c = 0$ и $\sqrt{a}\,x^2 + \sqrt{b}\,x - \sqrt{c} = 0$?

Ответ: нет.

Решение: Пусть такие числа существуют, подставим в уравнения вместо x значения d и $\sqrt{d}$ соответственно. Тогда имеем $c = ad^2 + bd$ и $\sqrt{c} = \sqrt{a}d + \sqrt{b}\sqrt{d}$. В последнем равенстве обе части положительны, возведем их в квадрат: $c = \left(\sqrt{a}d + \sqrt{b}\sqrt{d}\right)^2 = ad^2 + 2d\sqrt{abd} + bd = ad^2 + bd$. Значит $2d\sqrt{abd} = 0$, а так как a и b не равны 0, то $d = 0$. Но, тогда и число c будет равно 0, а это противоречит условию задачи.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

4. Трехзначное число, все цифры которого различны и отличны от нуля, назовем *сбалансированным*, если оно равно сумме всевозможных двузначных чисел, составленных из различных цифр этого числа. Найдите наименьшее сбалансированное число.

Ответ: 132.

Решение: Пусть искомое число имеет вид $\overline{abc}$. Тогда оно представимо в виде суммы шести различных двузначных чисел: $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{bc} + \overline{cb}$.

Из последнего равенства получаем $100a + 10b + c = 22a + 22b + 22c$, затем, приведя подобные и разделив обе части равенства на 2, приведем его к виду $26a = 4b + 7c$.

Далее, пусть a=1. Очевидно, что если мы получим сбалансированное число, начинающееся с 1, оно будет меньше любого числа с $a \geq 2$. Тогда имеем $4b + 7c = 26$. Так как c не меньше 1, то b не превосходит 4. При b=4 сразу получаем противоречие, а при b=3 находим c=2. Наименьшее сбалансированное число – 132.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, только верный ответ с проверкой – **2 балла**, получено уравнение в целых числах с использованием цифр числа – **1 балл**, решение неверно или только ответ без проверки – **0 баллов**.

5. Три окружности с радиусами 1, 2, 3 попарно касаются друг друга внешним образом в трех точках. Найдите радиус окружности, проходящей через эти три точки.

Ответ: 1.

Решение: Пусть O_1, O_2 и O_3 – центры данных окружностей, K, M, N – точки касания окружностей, причем $O_1K = O_1N = 1$, $O_2K = O_2M = 2$ и $O_3N = O_3M = 3$. Известно, что при касании двух окружностей точка касания лежит на отрезке, соединяющем их центры. Поэтому K, M, N – точки на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$. Заметим, что искомая окружность совпадает с окружностью, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$. Действительно, поскольку выполняются равенства $O_1K = O_1N$, $O_2K = O_2M$ и $O_3N = O_3M$, то точки K, M, N – точки касания вписанной окружности в треугольник $O_1O_2O_3$ с его сторонами.

Пусть r – искомый радиус, запишем площадь треугольника $O_1O_2O_3$ через периметр и r, и через формулы Герона. Получим уравнение:

$$\frac{1}{2}(3+4+5)r = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} \Rightarrow 6r = 6 \Rightarrow r = 1.$$

МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

6. Существуют ли 2022 последовательных натуральных чисел, среди которых есть ровно 22 простых числа?

Ответ: существуют.

Решение: Обозначим через P_n количество простых чисел среди 2022 последовательных чисел от n до n+2021. Заметим, что P_{n+1} отличается от P_n не более чем на единицу. Легко проверить, что $P_1 > 22$ (среди чисел первой сотни уже 25 простых чисел: 2, 3, 5, 7, ..., 97). С другой стороны набор последовательных чисел 2023!+2, 2023!+3, ... , 2023!+2023 очевидно состоит из 2022 составных чисел, т.е. $P_{2023!+2} = 0$. Поэтому при последовательном переходе числа n от 1 до 2023!+2 величина P_n изменится с числа, большего 22, до 0. Следовательно, в какой-то момент она будет равна 22.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.