11 класс

1. Найдутся ли такие натуральные числа a, b и c, что у каждого из уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx - c = 0$, $ax^2 - bx + c = 0$, $ax^2 - bx - c = 0$ оба корня – целые?

   Решение. Один из возможных примеров: $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$. **Ответ:** найдутся.

2. У Васи имеются монеты достоинством в 49 тугриков, у Пети – достоинством в 99 тугриков (у каждого монет достаточно много). Вася должен Пете тугрик. Смогут ли они рассчитаться?

   Решение. Нам нужно найти решение в неотрицательных целых числах для уравнения $49n - 99m = 1$. Заметим, что $99 - 49 \cdot 2 = 1$ или $49 \cdot (-2) - 99 \cdot (-1) = 1$ (*). Это решение нас не устраивает ввиду отрицательности коэффициентов. Рассмотрим однородное уравнение $49x-99y = 0$. Оно имеет серию решений $x = 99k$, $y = 49k$, где k пробегает множество целых чисел. Прибавляя к уравнению (*) решения однородного уравнения, получим серию решений для неоднородного уравнения, среди которых можно выбрать те, у которых коэффициенты будут положительными, например, $97 \cdot 49 - 48 \cdot 99 = 1$. **Ответ:** смогут.

   Комментарий. Приведен верный пример – 7 баллов.

3. Найдите наибольшее значение выражения $x^2+y^2+z^2$, если x, y, z – целые числа, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} xy + x + y = 20, \\ yz + z + y = 6, \\ xz + x + z = 2. \end{cases}$$

   Решение. Прибавим по 1 в обе части каждого уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} xy + x + y + 1 = 21, \\ yz + z + y + 1 = 7, \\ xz + x + z + 1 = 3. \end{cases}$$

   Раскладывая, далее, левые части на множители, получим:

$$\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 21, \\ (y + 1)(z + 1) = 7, \\ (z + 1)(x + 1) = 3. \end{cases}$$

Перемножим левые и правые части полученных уравнений, приходим к равенству $((x+1)(y+1)(z+1))^2 = 21^2$. Возможны два случая:

1) $(x+1)(y+1)(z+1) = 21$. Учитывая, что множители одного знака (это следует из вида последней системе), получим $x+1 = 3$, $y+1 = 7$, $z+1 = 1$ (порядок может быть другой, на окончательный ответ не влияет), поэтому $x = 2$, $y = 6$, $z = 0$, значит, $x^2+y^2+z^2 = 2^2+6^2+0^2 = 40$.

2) $(x+1)(y+1)(z+1) = -21$. Поскольку множители одно знака, получим $x+1 = -3$, $y+1 = -7$, $z+1 = -1$ (порядок может быть другой, на окончательный ответ не влияет), поэтому $x = -4$, $y = -8$, $z = -2$, значит, $x^2+y^2+z^2 = (-4)^2+(-8)^2+(-2)^2 = 84$. **Ответ:** 84.

4. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и P. Обозначим через MA хорду окружности ω_1, касающуюся окружности ω_2 в точке M, а через MB - хорду окружности ω_2, касающуюся окружности ω_1 в точке M. На прямой MP отложен отрезок $PH = MP$. Докажите, что четырёхугольник $MAHB$ вписанный.

   Решение. Пусть O_1, O_2, r_1, r_2 - центры и радиусы данных окружностей. Проведём перпендикуляры из точек O_1 и O_2 к хордам AM и BM соответственно и обозначим через R их точку пересечения. Если мы докажем, что $RP \perp MP$, то отсюда последует равенство $MR = RH$, и мы докажем тем самым, что R есть центр окружности, описанной около четырёхугольника $AMBH$ (так как $AR = MR$ и $BR = MR$ по построению). Итак, необходимо показать, что $RP \perp MP$. Заметим, что $O_2M \perp AM$ (так как O_2M - радиус, проведённый в точку касания), и, значит, $O_2M \parallel O_1R$. По той же причине $O_1M \parallel O_2R$. Но тогда O_2MO_1R - параллелограмм, и потому $O_2R = O_1M$ и $O_1R = O_2M$. Это значит, что точка R лежит на пересечении окружностей с центрами O_1 и O_2, имеющих радиусы r_2 и r_1 соответственно. Из очевидной симметрии ясно теперь, что $RP \parallel O_1O_2$, т. е. $RP \perp MP$, что и требуется.

5. Числа a, b и c удовлетворяют условию

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0.$$

   Докажите, что

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

   Решение. Умножим исходное равенство по очереди на дроби $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{c-a}$, $\frac{1}{a-b}$ и сложим:

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{a+c}{(b-c)(a-b)}+\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+$$
$$+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}=0.$$

$$\frac{a+c}{(b-c)(a-b)}+\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}=$$
$$=\frac{b^2-c^2+a^2-b^2+b^2-c^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0.$$

Отсюда следует требуемое равенство.