11 класс

1. Найдите наименьшее 10-значное число, у которого сумма цифр не меньше, чем у любого меньшего его числа.

Ответ: 1 899 999 999.

Решение. Среди 9-значных чисел сумма цифр наибольшая у числа 999 999 999, она равна 81. Поскольку искомое 10-значное число больше 999 999 999, мы должны подобрать наименьшее число с суммой цифр не меньше, чем 81. Сумма последних восьми цифр искомого числа не больше $9 \cdot 8 = 72$, поэтому первые две цифры в сумме не меньше, чем $81 - 72 = 9$. Так как искомое число наименьшее, его первая цифра равна 1, а вторая — 8. Тогда сумма остальных восьми цифр не меньше 72, и значит, оставшиеся цифры — это девятки.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 1 балл. Доказано, что сумма цифр искомого числа не меньше 81 — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель половину партий выиграл, половину — сыграл вничью. Оказалось, что он набрал очков в 13 раз меньше, чем все остальные. (За победу — 1 очко, за ничью — 0,5, за поражение — 0.) Сколько было шахматистов в турнире?

Ответ: 21 *шахматист.*

Решение. Если количество участников n, то каждый сыграл $n-1$ партий. Половину партий победитель выиграл и набрал $\frac{1}{2}(n-1)$ очков. Половину партий он сыграл вничью и набрал ещё $\frac{1}{4}(n-1)$ очков. Всего победитель набрал $\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{4}(n-1) = \frac{3}{4}(n-1)$ очков.

В турнире было сыграно $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. В каждой партии игроки разыграли одно очко, поэтому в сумме набрали соответственно $\frac{1}{2}n(n-1)$ очков. Значит,

$$13 \cdot \frac{3(n-1)}{4} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{3(n-1)}{4},$$

откуда $n = 21$. Итак, в турнире из 21 шахматиста победитель сыграл 20 партий и набрал $10 + 5 = 15$ очков, остальные набрали $\frac{1}{2} \cdot 21(21-1) - 15 = 195$ очков, то есть в 13 раз больше, чем у победителя.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что при $n = 21$ турнир удовлетворяет условию, но не обосновано, что других решений нет — 2 балла. Правильно составлено уравнение для числа участников — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда равна 3. Чему равно наибольшее возможное значение площади поверхности у такого параллелепипеда?

Ответ: 18.

Решение. Пусть рёбра прямоугольного параллелепипеда — a, b и c. По условию задачи его диагональ равна $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 3$, и значит, $a^2+b^2+c^2 = 9$. Площадь поверхности параллелепипеда равна $f = 2(ab+bc+ca)$. Докажем неравенство $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$. Действительно, умножим обе части на 2 и запишем его в равносильной форме

$$2ab+2bc+2ca \leqslant 2a^2+2b^2+2c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \leqslant 0.$$

Из доказанного неравенства следует, что наибольшее значение функции f не превосходит $2 \cdot 9 = 18$, причём знак равенства возможен только в случае прямоугольного параллелепипеда, у которого все рёбра равны $a = b = c = \sqrt{3}$, то есть для куба с ребром $\sqrt{3}$.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 0 баллов. Правильно составлена функция f — 1 балл. Отмечено (без обоснования), что наибольшее значение достигается для куба и правильно подсчитана длина его ребра — ещё 1 балл. Доказательство оценки без указания примера — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. Все значения квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ на отрезке $[\,0;2\,]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|\,a\,|+|\,b\,|+|\,c\,|$? Для какой функции $f(x)$ достигается это значение?

Ответ: *наибольшее значение равно* 7; *достигается, например, для* $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

Решение. По условию значения $f(x) = ax^2+bx+c$ отрезке $[0;2]$ по модулю не превосходят единицы. В частности, $|\,f(0)\,| \leqslant 1$, $|\,f(1)\,| \leqslant 1$, $|\,f(2)\,| \leqslant 1$, что равносильно системе

$$\begin{cases} |\,c\,| \leqslant 1, \\ |\,a+b+c\,| \leqslant 1, \\ |\,4a+2b+c\,| \leqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку модуль суммы чисел не превосходит суммы их модулей, получаем неравенства

$$|\,2a\,| = |\,(4a+2b+c) - 2(a+b+c) + c\,| \leqslant |\,4a+2b+c\,| + 2\,|\,(a+b+c)\,| + |\,c\,| \leqslant 4,$$
$$|\,2b\,| = |\,4(a+b+c) - (4a+2b+c) - 3c\,| \leqslant 4\,|\,a+b+c\,| + |\,4a+2b+c\,| + 3\,|\,c\,| \leqslant 8,$$

откуда $|\,a\,| \leqslant 2$, $|\,b\,| \leqslant 4$, и значит, $|\,a\,| + |\,b\,| + |\,c\,| \leqslant 7$.

Для функции $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ величина $|\,a\,| + |\,b\,| + |\,c\,|$ в точности равна 7. Кроме того, квадратный трёхчлен $f(x) = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1$ удовлетворяет условию задачи, так как при $x \in [\,0;2\,]$

$$-1 = f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0) = f(2) = 1.$$

Таким образом, наибольшее значение величины $|\,a\,| + |\,b\,| + |\,c\,|$ при данных условиях равно 7.

Критерии. Верный ответ — 0 баллов. Доказано неравенство $|\,c\,| \leqslant 1$ — 1 балл. Доказано только одно из неравенств $|\,a\,| \leqslant 2$ или $|\,b\,| \leqslant 4$, — ещё 2 балла. Доказано, что сумма модулей не превосходит 7, — 5 баллов (с предыдущими баллами не суммируются). Пример функции без обоснования оценки — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и BB_2 внутреннего и внешнего углов при вершине B. Из точки H пересечения высот опущены перпендикуляры HH_1 и HH_2 на прямые BB_1 и BB_2. В каком отношении прямая H_1H_2 делит сторону AC?

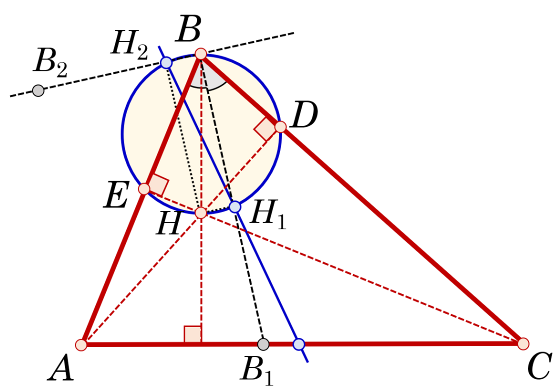

Рис. 4

Ответ: *прямая* H_1H_2 *делит* AC *пополам.*

Решение. (Рис. 4.) Пусть AD и CE — высоты треугольника ABC. Поскольку биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, четырёхугольник HH_2BH_1 — прямоугольник. Диагонали H_1H_2 и BH — диаметры описанной окружности прямоугольника. Эта окружность проходит через точки E и D, так как из этих точек диаметр BH виден под прямым углом. Точка H_1 лежит на биссектрисе вписанного угла EBD, поэтому H_1 — середина дуги ED, не содержащей точки H_2, а так как H_1H_2 — диаметр окружности, то точки H_1 и H_2 также равноудалены от концов отрезка ED. Другими словами, серединный перпендикуляр к отрезку ED проходит через точки H_1 и H_2. Далее, так как четырёхугольник $AEDC$ является вписанным в окружность с диаметром AC, то серединный перпендикуляр к хорде ED проходит через центр этой новой окружности, то есть через середину отрезка AC. Таким образом, прямая H_1H_2 делит сторону AC пополам.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Отмечено, что четырёхугольник $BDHE$ вписан в окружность с диаметром BH — 1 балл. Доказано, что точки H_1 и H_2 являются серединами малой и большой дуги ED — ещё 2 балла. Отмечено, что прямая H_1H_2 является серединным перпендикуляром к отрезку ED — ещё 1 балл. Доказано, что для описанной окружности четырёхугольника $AEDC$ серединный перпендикуляр к отрезку ED проходит через середину AC — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.