# *Ключи к заданиям муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников 2022/23 учебного года по математике*

## Условия и решения задач

**11.1.** Аня вышла из дома, через некоторое время оттуда же вышел Ваня, который вскоре догнал Аню. Если бы Ваня шёл вдвое быстрее, то он догнал бы Аню в три раза быстрее. Во сколько раз быстрее Ваня догнал бы Аню (по сравнению с реальным временем), если бы вдобавок Аня шла вдвое медленнее?

*Ответ*. 7.

*Решение.* Пусть скорость Ани равна $v$, а скорость Вани — $V$. Расстояние, на которое отошла Аня, пропорционально $v$, а Ваня догоняет её со скоростью $u = V - v$. Когда Ваня удваивает скорость, эта разность по условию утраивается, т. е. $u + V = 2V - v = 3u$. Отсюда $V = 2u = 2v$. Если скорость Вани удвоится, а скорость Ани уменьшится вдвое, новая разность скоростей станет равна $3{,}5v$, что в 7 раз больше новой скорости Маши. Поэтому Ваня догонит её в 7 раз быстрее.

**11.2.** В коробке лежат белые и синие шары, причём белых шаров в 8 раз больше, чем синих. Известно, что если вытащить 100 шаров, то среди них обязательно найдётся хотя бы один синий. Сколько всего шаров в коробке?

*Ответ*. 108.

*Решение.* Так как в коробке белых шаров в 8 раз больше, чем синих, то общее число шаров в коробке делится на 9. Поскольку из неё извлекают 100 шаров, то наименьшее возможное число шаров в коробке $n = 108$, из них 12 синих, 96 белых. Так как белых шаров меньше ста, то в любом наборе из ста шаров найдутся синие. Если $n > 108$, то $n \geq 117$ (так как $n$ делится на 9). Тогда белых шаров будет больше или равно 104, и найдутся наборы из ста шаров, не содержащие синих шаров.

**11.3.** Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{1-3x}-1=\sqrt{5y-3x},\\ \sqrt{5-5y}+\sqrt{5y-3x}=5.\end{cases}$

*Ответ.* $\left(-\frac{8}{3},-\frac{4}{5}\right)$.

*Решение.* Введем новые переменные $u=\sqrt{1-3x}$, $v=\sqrt{5\text{y}-3\text{x}}$, $w=\sqrt{5-5y}$.

Система перепишется в виде $\begin{cases}u-1=v,\\ v+w=5,\end{cases}$ где $u\geq 0, v\geq 0, w\geq 0$.

Заметим, что $u^2-v^2-w^2=1-3x-5y+3x-5+5y=-4$ и $u=v+1, w=5-v$.

Получим квадратное уравнение $(v+1)^2-v^2-(5-v)^2=-4$, решая которое найдем корни $v_1=2, v_2=10$.

При $v_1=2$, то $u_1=3, w_1=3$, и получим систему уравнений

$$\begin{cases}1-3x=9,\\ 5-5y=9.\end{cases}$$

Следовательно, $x_1=-\frac{8}{3}, y_1=-\frac{4}{5}$.

Если $v_2=10$, то $u_2=11, w_2=-6<0$ и система не имеет решения.

**11.4**. Даны 15 различных попарно взаимно простых натуральных чисел из отрезка $[2, 2022]$. Докажите, что одно из этих чисел простое.

*Решение.* Предположим, что это не так. Обозначим эти числа через $a_1, a_2, \dots, a_{15}$, а через $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ – их наименьшие простые делители соответственно. Так как все числа попарно взаимно просты, то эти простые делители различны. Первые 15 простых чисел – 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Это означает, что наибольший из простых делителей $p_i\geq 47$. А тогда соответствующее ему число $a_i\geq 47^2=2309>2022$, что противоречит условию. Значит одно из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ – простое.

**11.5**. Найдите все значения, которые может принимать угол $B$ треугольника $ABC$, если известно, что расстояние между основаниями высот, опущенных из вершин $A$ и $C$, равно половине радиуса описанной около этого треугольника окружности.

*Ответ.* $15^\circ$, $75^\circ$, $105^\circ$, $165^\circ$.

*Решение.* Пусть $A_1$ и $C_1$ – основания высот треугольника $ABC$, опущенных из вершин $A$ и $C$ соответственно. $\angle B = \beta$, а $R$ – радиус описанной около $ABC$ окружности. Не зависимо от вида треугольника $ABC$ треугольник $A_1BC_1$ ему подобен. Так как треугольники $AA_1B$ и $CC_1B$ – прямоугольные, с углом при вершине $B$, равным $\beta$, если $\beta < 90^\circ$ и равным $180^\circ - \beta$, если $\beta > 90^\circ$. Во всех случаях $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1B}{BC} = |\cos\beta|$.

Так как по условию $A_1C_1 = \frac{R}{2}$, а по теореме синусов $AC = 2R\sin\beta$, получаем уравнение $2\sin\beta\,|\cos\beta| = \frac{1}{2}$.

Если $\beta < 90^\circ$, то $\sin 2\beta = \frac{1}{2}$ и $\beta = 15^\circ$ или $\beta = 75^\circ$.

Если $\beta \geq 90^\circ$, то получаем уравнение $\sin 2\beta = -\frac{1}{2}$, откуда $\beta = 105^\circ$ или $\beta = 165^\circ$.

*Комментарий.* Одно любое верно найденное значение угла – 2 балла, рассмотрен только случай острого угла $B$ (или только тупого) – 3 балла.