ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Муниципальный этап. Ответы и решения.

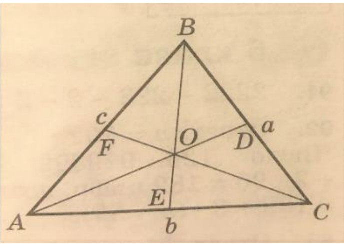
11 класс.

11.1. Ответ. $2022^{2022} > 2023^{2021}$.

Решение. Рассмотрим отношение $\frac{2023^{2021}}{2022^{2022}} = \frac{2023^{2022}\cdot 2023^{-1}}{2022^{2022}} = (\frac{2023}{2022})^{2022} \cdot 2023^{-1} = (1 + \frac{1}{2022})^{2022} \cdot 2023^{-1}$.

Так как $(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha} < 3$, то $(1+\frac{1}{2022})^{2022} \cdot 2023^{-1} < \frac{3}{2023} < 1$. Значит, $2022^{2022} > 2023^{2021}$.

11.2. Решение. По условию $S = \frac{1}{2} BF \cdot BO \cdot \sin\angle FBO = \frac{1}{2} BD \cdot BO \cdot \sin\angle DBO$.



Это значит, что $BD = BF$. Но если a, b, c – длины сторон треугольника ABC, лежащих соответственно против углов A, B и C , то по свойству его биссектрисы $\frac{c}{BD} = \frac{b}{DC} = \frac{b}{a-BD}$, откуда $BD = \frac{ac}{b+c}$. Аналогично $BF = \frac{ac}{a+b}$. Значит, $\frac{ac}{a+b} = \frac{ac}{b+c}$, и $c = a$.

11.3. Ответ. Не существует.

Решение. Пусть $tgx + \sqrt{3} = n$ и $ctgx + \sqrt{3} = m$, где n и m – целые числа. Тогда $tgx = n - \sqrt{3}, ctgx = m - \sqrt{3}$, следовательно, $(n-\sqrt{3})(m-\sqrt{3}) = 1$, откуда $(n+m)\sqrt{3} = nm + 2$. Число $\sqrt{3}$ иррационально, поэтому это равенство возможно лишь в случае $n + m = nm + 2 = 0$. Полученное равенство возможно только для иррациональных n и m ($n = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, $m = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$).

11.4. Ответ. Не может.

Решение. Заметим, что числа 1, 5, 9 имеют вид $4k + 1$.Тогда каждое число из A представимо в виде $100a + (4b+1)\cdot 10 + (4c+1) = 4m + 3$ (например, 1959 = 19·100 + 5·10 + 9), т.е. каждое число из множества A имеет остаток 3 при делении на 4 и сумма 1001 числа из множества A также будет иметь остаток 3 при делении на 4, так как 1001 = 4·250 + 1. Однако квадраты четных чисел делятся на 4, а квадраты нечетных чисел имеют остаток 1 при делении на 4, так как $(2t+1)^2 = 4(t^2+t) + 1$. Поэтому сумма 1001 различного числа из множества A не может быть полным квадратом.

11.5. Ответ. Выигрывает второй.

Решение. Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый игрок первым ходом взял 1 камень из какой-нибудь кучки, то второму следует взять по 1 камню из двух других кучек. Если же первый игрок первым ходом взял по 1 камню из каких-то двух кучек, то второму следует взять 1 камень из оставшейся кучки. Таким образом после хода второго в первой кучке будет лежать 6 камней, во второй – 8 камней, в третьей – 10 камней, т.е. в каждой кучке будет лежать четное число камней. Каждым следующим ходом второй должен брать столько же камней и из тех же кучек, что и первый, т.е. после каждого хода второго в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Второй всегда сможет сделать ход, так как после хода первого в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, т.е. хотя бы по одному. А так как второй всегда сможет сделать ход, то именно он заберет последние камни из кучек и выиграет.