Ключи. 11 класс. ВсОШ по математике. Муниципальный этап. 2022-2023 учебный год.

Принципы оценивания

1. *Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.*
2. *Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.*
3. *Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.*

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части— решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в критериях или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

11.1. Решение. Перебор некоторых значений a, b, c, d, e показывает, что как будто данное неравенство справедливо при любых значениях этих переменных. Докажем в общем виде. Раскроем скобки в правой части неравенства, перенесём все члены в левую часть и умножим новое неравенство на 4:

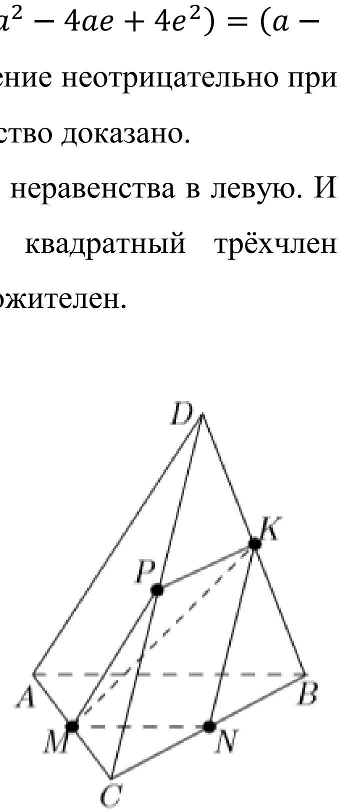
$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 - 4ab - 4ac - 4ad - 4ae \geq 0.$$

Преобразуем левую часть полученного неравенства:

$(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2) = (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2$. Последнее выражение неотрицательно при всех действительных значениях a, b, c, d, e. Исходное неравенство доказано.

Второй способ: перенести все члены правой части исходного неравенства в левую. И рассмотреть левую часть полученного неравенства как квадратный трёхчлен относительно a, доказать, что дискриминант трёхчлена неположителен.

11.2. Решение. Пусть MK – хорошая средняя линия тетраэдра ABCD (M и K — середины рёбер AC и BD соответственно — см. рис.). Обозначим через N и P середины рёбер CB и CD. Тогда углы, образуемые средней линией тетраэдра с непересекающимися с ней рёбрами — это ∠PMK, ∠PKM, ∠NMK, и ∠MKN. По условию они равны, поэтому треугольники PKM и NKM равные и равнобедренные. Тогда MP = PK = KN = NM, а так как эти отрезки — суть средние линии граней, то имеем AB = CD. Итак, наличие у

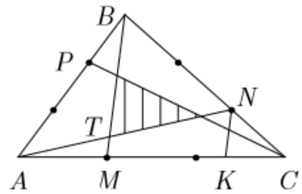


тетраэдра хорошей средней линии влечёт равенство всех не пересекающих её рёбер, поэтому наличие двух хороших средних линий даст равенство вообще всех рёбер, т.е., правильность тетраэдра.

11.3.Решение. Надо задавать вопросы так, чтобы каждый последующий вопрос уменьшал вдвое количество остающихся возможных вариантов. При такой системе, чтобы угадать один из двух вариантов, достаточно n вопросов. Так как по условию имеется всего $10^7 \leq 2^{24}$ различных телефонных номеров, то хватит 24 вопросов. Сами вопросы можно задавать по-разному. Пример: «Верно ли, что ваш номер больше 5 000 000? Если ответили «да», то второй вопрос может быть такой: «Больше ли он 7 500 000?» и т.д.

Но проще воспользоваться двоичной системой счисления. Каждое число, меньшее 10 000 000, запишется не более, чем 24 такими цифрами. Можно задавать такие вопросы: «Верно ли, что последняя цифра двоичной записи номера вашего телефона – единица?»; «Верно ли, что предпоследняя цифра – единица?» и т.д. Покажем, что 23 вопросов недостаточно. Различных комбинаций из 23 слов «да» и «нет» имеется $2^{23} < 10\,000\,000$. Поэтому найдутся два различных номера, приводящих к одинаковой последовательности ответов, и у нас не будет никакой возможности решить, какой из них истинный.

11.4. ОТВЕТ: в семь раз.



Решение. Пусть S – площадь исходного треугольника, S_1 – площадь незаштрихованной части. Тогда S_1 равна сумме площадей треугольников ABM, BPC и ACN минус сумма площадей трёх примыкающих к углам маленьких треугольников.

Выразим через S площадь каждого такого треугольника, для чего проведем через точку N прямую, параллельную прямой BM (см. рис.).

Пусть K – точка пересечения этой прямой со стороной AC. Из подобия треугольников CNK и CBM получаем: $\frac{CK}{CM} = \frac{CN}{CB} = \frac{1}{3}$. Поэтому $CK = \frac{2}{9}AC, AK = \frac{7}{9}AC.$ Из подобия треугольников ATM и ANK получаем $\frac{AT}{AN} = \frac{AM}{AK} = \frac{AC}{3} : \frac{7AC}{9} = \frac{3}{7}$.

Т.к. $S_{ABM} = S_{BPC} = S_{ANC} = \frac{1}{3}S$, имеем $S_{ATM} = \frac{1}{2}AT \cdot AM \cdot sin < TAM = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}AN \cdot \frac{1}{3}AC \cdot sin < NAC = \frac{1}{7}S_{ANC} = \frac{1}{21}S.$

Аналогично, площадь каждого из примыкающих к углам треугольничков равна $\frac{1}{21}\ S$, поэтому $S_1 = 3 \cdot \frac{1}{3}S - 3 \cdot \frac{1}{21}S = \frac{6}{7}S.$ Тогда получим, что отношение площади треугольника ABC к площади заштрихованного равно 7.

11.5. Решение. Т.к. $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, то

$$cos\gamma = -cos(\alpha+\beta) = -\left(2cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right) = 1 - 2cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$cos\alpha + cos\beta + 1 - 2cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{3}{2},$$

$$2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2},$$

$$4cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 4cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1,$$

$$4cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 = 0,$$

$$\left(4cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} + cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0,$$

$$\left(2cos\frac{\alpha+\beta}{2} - cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

$$\begin{cases} sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0, \\ 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} - cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы $\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$, т. е. $\alpha = \beta$.

Тогда из второго уравнения $2cos\alpha - 1 = 0, cos\alpha = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$.

Но тогда и $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Значит $\alpha = \beta = \gamma$.