Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2022-2023 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 11 класс

$\boxed{\mathbf{11.1}}$ *На конкурсе по бессмысленной деятельности участник записал по кругу* 2022 *числа так, что каждое равно произведению двух соседей. Какое максимальное количество различных чисел могло быть им использовано?*

Решение: Если среди чисел есть ноль, то его соседи тоже нули, поэтому все записанные числа будут равны нулю. Будем считать, что среди чисел нулей нет. Пусть a и b — два соседних числа. Тогда с другой стороны от a стоит a/b, а с другой стороны от b стоит b/a. Другими словами, два числа на расстоянии 3 обратны друг другу, а тогда числа на расстоянии 6 равны, поэтому различных чисел не более 2022/6=337. Пример можно соорудить из повторяющихся по кругу шестёрок чисел 2, 6, 3, 1/2, 1/6, 1/3.

Критерии:

- Только ответ с примером без обоснования максимальности — 1 балл.

$\boxed{\mathbf{11.2}}$ *Известно, что для заданных чисел a и b система уравнений*

$$\begin{cases} y = x^2 + ax + b \\ x = y^2 + ay + b \end{cases}$$

имеет более одного решения. Докажите, что $a^2 > 2(a + 2b) - 1$.

Решение: Графики уравнений $y = x^2 + ax + b$ и $x = y^2 + ay + b$ симметричны относительно прямой $x = y$. Если парабола $y = x^2 + ax + b$ не пересекается с осью симметрии, то два графика лежат по разные стороны от неё и не пересекаются, т.е. решений у системы нет. Если парабола $y = x^2 + ax + b$ касается оси симметрии, то вторая тоже, и точка касания – их единственная общая точка, поэтому решение будет ровно одно. Значит парабола $y = x^2 + ax + b$ пересекается с осью симметрии в двух разных точках. Это означает, что уравнение $x = x^2 + ax + b$ имеет два различных корня, поэтому его дискриминант $(a-1)^2 - 4b$ строго положителен, что равносильно требуемому в условии неравенству.

Критерии:

- Доказано, что параболы обязаны иметь общую точку с прямой $x = y$ — 2 балла.

$\boxed{\mathbf{11.3}}$ *Другой участник конкурса по бессмысленной деятельности выписал* 765 *различных натуральных чисел из последовательности* 1, 2, 3, ..., 2023. *Он утверждает, что сумма никаких двух из выбранных им чисел не делится на* 8. *Не заблуждается ли уважаемый участник?*

Решение: Предположим участник прав. Из указанного в условии списка есть ровно по 253 остатков от деления на 8 каждого вида от 1 до 7 и 252 числа с остатком 0. Чисел с остатками 0 и 4 можно взять не более одного. Нельзя было брать одновременно числа с остатком 1 и 7, значит в наборе чудака есть либо те, либо другие, а потому не более 253 чисел с остатком 1 или 7. Аналогично с остатком 2 или 6 суммарно не более 253 чисел, а также с остатками 3 и 5. Итого, чтобы сумма никаких двух не поделилась на 8, участник мог выбрать не более $1 + 1 + 253 + 253 + 253 = 761$ чисел. Противоречие.

Критерии:

- Замечено, что можно брать не более одного числа кратного 4 и не более одного числа с остатком 4 — 1 балл.

$\boxed{\textbf{11.4}}$ *Ещё один участник конкурса по бессмысленной деятельности притащил с собой N единичных квадратиков, из которых тут же, на глазах изумлённого жюри, составил прямоугольник со сторонами, отличающимися на 9. На этом участник не остановился и составил из этих же N квадратиков большой квадрат, но в этот раз 6 квадратиков у него остались лишними. Найдите возможные значения N.*

Решение 1: Пусть x — это меньшая сторона прямоугольника, а y — сторона квадрата. Тогда $N = x(x+9) = y^2+6$. Домножив обе части уравнения на 4, получим $2x(2x+18) = (x+9)^2 - 81 = 4y^2 + 24, (2x-2y+9)(2x+2y+9) = 105$. В этом произведении множитель $2x+2y+9$ положительный и не меньше 13, а второй множитель целый. Делители числа 105, большие 12 — это 15, 21, 35 и 105 (тогда $2x-2y+9$ соответственно равно 7, 5, 3 и 1). Решая в каждом случае систему линейных уравнений, мы приходим к решениям (1, 2), (2, 4), (5, 8) и (22, 26), которые соответствуют значениям $N = 10, 22, 70, 682$ соответственно.

Решение 2: Уравнение $x(x+9) = y^2+6$ можно решить иначе. С одной стороны, $9x > 6$, поэтому $y^2+6 = x^2+9x > x^2+6, y > x$. С другой стороны, $y^2+6 = x^2+9x < x^2+10x+31 = (x+5)^2+6, y < x+5$. Итак, значение $y-x$ может быть равно 1, 2, 3 или 4. В каждом из четырёх случаев уравнение сводится к линейному, решение которого позволяет найти одно из четырёх значений N.

Критерии:

- При переборе делителей рассматриваются только натуральные делители, при этом положительность двух множителей не очевидна — снимается до 2 баллов;
- Только ответ — 0 баллов.

$\boxed{\textbf{11.5}}$ *Касательные к описанной окружности прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) в точках A и C пересекаются в точке T. Лучи AB и TC пересекаются в точке S. Известно, что площади треугольников $\triangle ACT$ и $\triangle BCS$ совпадают. Найдите отношение площадей треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle ATS$.*

Решение: Пусть точка M — середина гипотенузы AB, а точка N — середина катета AC. Заметим, что точки M, N и T лежат на одной прямой — серединном перпендикуляре к отрезку AC. Пусть площадь треугольника TNC равна S_1, а площадь треугольника AMN равна S_2. Тогда $S(\Delta ANT) = S_1, S(\Delta SBC) = 2S_1, S(\Delta MNC) = S_2, S(\Delta BMC) = 2S_2$. Поскольку $S(\Delta TMC) = S_1 + S_2, S(\Delta SMC) = 2S_1 + 2S_2$, и у этих треугольников общая высота, то их основания относятся как $SC : TC = 2 : 1$. Тогда по теореме Фалеса и опять используя треугольники с общей высотой

$$\frac{SC}{TC} = \frac{SB}{BM} = \frac{S(\Delta SBC)}{S(\Delta BMC)} = \frac{S_1}{S_2},$$

откуда получаем $S_1 = 2S_2$. Отсюда $S(\Delta ABC) : S(\Delta ATS) = 4S_2 : (4S_1 + 4S_2) = 1 : 3$.

Критерии:

- Найдено отношение $SC : TC$ — 3 балла.