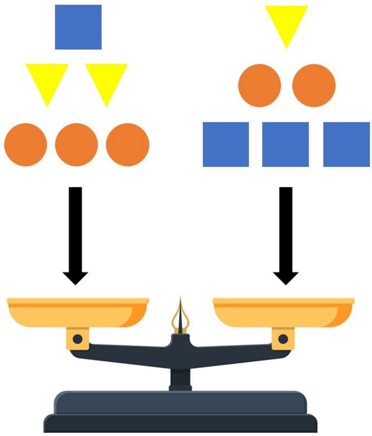
Решения

4 класс

Задача 4.1. Круглые гири весят 200 граммов, квадратные — 300 граммов, а треугольные — 150 граммов. 12 гирь положили на чашечные весы, как показано на рисунке. Какая чаша тяжелее и на сколько граммов?



Ответ: правая тяжелее на 250 граммов.

Решение. Вес левой чаши в граммах равен

$$1 \cdot 300 + 2 \cdot 150 + 3 \cdot 200 = 1200.$$

Вес правой чаши в граммах равен

$$1 \cdot 150 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 300 = 1450.$$

Таким образом, правая чаша весов тяжелее левой на 250 граммов. □

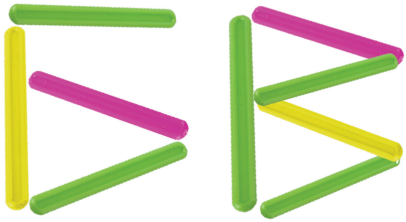
Задача 4.2. В 4«А» классе у каждого ребёнка есть не менее 11 одноклассников и не менее 13 одноклассниц. Какое наименьшее количество детей может учиться в этом классе?

Ответ: 26.

Решение. Нетрудно проверить, что класс, состоящий из 12 мальчиков и 14 девочек, удовлетворяет условию задачи. Теперь докажем, что меньше быть не может.

Ясно, что в классе есть и мальчики, и девочки. У каждого мальчика в классе не менее 11 одноклассников, поэтому всего мальчиков хотя бы 12. У каждой девочки в классе не менее 13 одноклассниц, поэтому всего девочек хотя бы 14. Таким образом, в классе учится хотя бы $12 + 14 = 26$ детей. □

Задача 4.3. У Саши было 47 палочек. Использовав их все, он сложил несколько букв «Б» и «В», изображённых на рисунке. Какое наибольшее количество букв «Б» могло получиться у Саши?



Ответ: 8.

Решение. Чтобы сложить букву «Б», нужно 4 палочки, а чтобы сложить букву «В», нужно 5 палочек.

- Хотя бы 12 букв «Б» Саша сложить не мог, так как для этого понадобилось бы не менее 48 палочек.
- Если бы Саша сложил 11 букв «Б», то у него осталось бы $47 - 11 \cdot 4 = 3$ палочки. А этого бы не хватило даже на одну букву «В».
- Если бы Саша сложил 10 букв «Б», то у него осталось бы $47 - 10 \cdot 4 = 7$ палочек. Можно было бы выложить одну букву «В», но остались бы лишние палочки.
- Если бы Саша сложил 9 букв «Б», то у него осталось бы $47 - 9 \cdot 4 = 11$ палочек. Можно было бы выложить две буквы «В», но осталась бы лишняя палочка.
- Если бы Саша сложил 8 букв «Б», то у него осталось бы $47 - 8 \cdot 4 = 15$ палочек. Этого как раз хватает на 3 буквы «В». □

Задача 4.4. Коты Леопольд, Гарфилд, Василий, Матильда и Том съели на кухне две котлеты, две сосиски и одну рыбу. Каждый из них съел что-то одно. Известно, что:

- Леопольд, Гарфилд и Том съели 3 разных блюда;
- Василий не ел котлету, а Леопольд не ел сосиску;
- Гарфилд и Матильда съели одно и то же.

Кому что досталось?

Ответ: Гарфилду и Матильде — котлеты, Василию и Тому — сосиски, Леопольду — рыба.

Решение. Гарфилд и Матильда съели одно и то же, значит, они съели либо по сосиске, либо по котлете.

Случай 1. Гарфилд и Матильда съели по сосиске.

По условию Василий не ел котлету, также он не ел сосиску (так как все сосиски съели Гарфилд и Матильда). Значит, Василий съел единственную рыбу.

Леопольду и Тому остаются котлеты, но это противоречит условию о том, что Леопольд, Гарфилд и Том съели 3 разных блюда.

Случай 2. Гарфилд и Матильда съели по котлете.

По условию Леопольд не ел сосиску, также он не ел котлету (так как все котлеты съели Гарфилд и Матильда). Значит, Леопольд съел единственную рыбу.

Василию и Тому остаются сосиски. Все условия задачи при этом выполняются. □

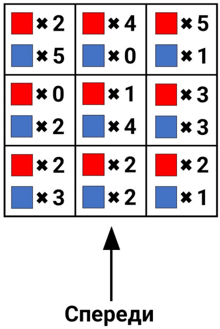
Задача 4.5. У мамы с папой есть двое детей: Коля и Таня. Папа старше мамы на 4 года. Коля тоже старше Тани на 4 года и вдвое младше папы. Сколько лет каждому из них, если суммарный возраст всех членов семьи составляет 130 лет?

Ответ: Тане 19 лет, Коле 23 года, маме 42 года, папе 46 лет.

Решение. Мысленно увеличим возраст мамы и Тани на 4 года. Тогда возраст у двух членов семьи будет равен возрасту папы, ещё у двух — половинке возраста папы. Тогда суммарный возраст всех членов семьи равен $130 + 4 + 4 = 138$ лет, и он должен быть равен утроенному возрасту папы. Следовательно, папе должно быть $138 : 3 = 46$ лет. Отсюда легко понять, что маме $46 - 4 = 42$ года, Коле $46 : 2 = 23$ года, а Тане $23 - 4 = 19$ лет. □

Задача 4.6. Женя взял доску 3×3 и на каждую клетку поставил столбик из синих и красных кубиков. Потом он зарисовал схему получившейся расстановки: подписал количество кубиков обоих цветов в каждом столбике (порядок кубиков неизвестен).

Какое наибольшее количество синих кубиков может увидеть Женя, если посмотрит на конструкцию спереди? (Например, если перед столбиком из 8 кубиков стоит столбик из 5, то будет видно все 5 кубиков ближнего столбика и только 3 верхних кубика дальнего столбика.)



Ответ: 12.

Решение. Поймём, какое наибольшее количество синих кубиков Женя может увидеть в каждом из трёх рядов: левом, среднем и правом.

Левый ряд. Первый столбик состоит из 5 кубиков (2 красных и 3 синих), поэтому он полностью загораживает второй столбик, а также 5 из 7 кубиков последнего столбика.

Таким образом, Женя видит все кубики первого столбика (среди них 3 синих), а также 2 кубика из последнего столбика (они оба могут быть синими). То есть в этом ряду он увидит максимум $3 + 2 = 5$ синих кубиков.

Средний ряд. Первый столбик состоит из 4 кубиков (2 красных и 2 синих), поэтому он полностью загораживает последний столбик, а также 4 из 5 кубиков второго столбика.

Таким образом, Женя видит все кубики первого столбика (среди них 2 синих), а также 1 кубик из второго столбика (он может быть синим). То есть в этом ряду он увидит максимум $2 + 1 = 3$ синих кубика.

Правый ряд. Первый столбик состоит из 3 кубиков (2 красных и 1 синий), поэтому он загораживает 3 из 6 кубиков второго столбика. При этом второй столбик полностью загораживает последний столбик.

Таким образом, Женя видит все кубики первого столбика (среди них 1 синий), а также 3 кубика из второго столбика (все три могут быть синими). То есть в этом ряду он увидит максимум $1 + 3 = 4$ синих кубика.

Суммарно Женя увидит максимум $5 + 3 + 4 = 12$ синих кубиков. □

Задача 4.7. На столе лежит 4 стопки монет. В первой стопке 9 монет, во второй — 7, в третьей — 5, в четвёртой — 10. За один ход разрешается добавить по одной монете к трём разным стопкам. За какое наименьшее количество ходов можно добиться того, чтобы во всех стопках стало поровну монет?

Ответ: 11.

Решение. Предположим, было сделано N ходов, после которых во всех стопках стало поровну монет.

Немного изменим правила. Пусть первоначально в стопках лежало не 9, 7, 5 и 10 монет, а $N+9, N+7, N+5$ и $N+10$ соответственно; а ходы выполним следующим образом: вместо добавления по одной монете в три стопки, будем забирать одну монету из стопки (той, в которую во время оригинального хода мы не добавляли монету). Заметим, что итоговый результат от этого не изменится! (Фактически, вместо добавления монет в три стопки мы добавляем их во все четыре, а потом одну забираем.)

В рамках новых правил ответить на вопрос гораздо проще. За один ход мы забираем одну монету из любой стопки, и наша цель — как можно быстрее сделать так, чтобы монет во всех стопках стало поровну. Легко понять, что для этого надо везде оставлять по $N+5$ монет. Для этого из первой стопки нужно забрать 4 монеты, из второй — 2, из третьей — 0, из четвёртой — 5. Итого надо совершить $4+2+0+5=11$ ходов. □

Задача 4.8. У Васи есть шесть одинаковых игральных кубиков, на гранях каждого из которых записаны числа от 1 до 6 (каждое — по одному разу). Вася бросал все шесть кубиков шесть раз подряд. Ни на одном из кубиков не выпадало дважды одно и то же число.

Известно, что при первом броске сумма чисел на верхних гранях равнялась 21, а при следующих четырёх бросках — 19, 20, 18 и 25. Какая сумма получилась при шестом броске?

Ответ: 23.

Решение. Поскольку за шесть бросков ни на одном из кубиков не выпадало дважды одно и то же число, то на каждом кубике выпали по одному разу все числа от 1 до 6.

Посчитаем общую сумму всех чисел, выпавших на всех кубиках за шесть бросков. Для одного кубика эта сумма равняется $1+2+3+4+5+6=21$, а для шести — $6\cdot 21=126$.

Осталось посчитать сумму чисел на шестом броске: $126-21-19-20-18-25=23$. □

Замечание. Одна из возможных конфигураций бросков кубиков изображена ниже (первое число в сумме — это число на первом кубике, второе число — на втором, ..., шестое число — на шестом).

$$1+5+6+3+5+1=21;$$
$$2+4+3+4+1+5=19;$$
$$3+1+5+2+3+6=20;$$
$$4+2+2+5+2+3=18;$$
$$5+3+1+6+6+4=25;$$
$$6+6+4+1+4+2=23.$$