

Школьный этап ВСОШ по математике, 2022-2023 учебный год, 4 класс.

1.1. Когда-то давно Кирилл задумался о сегодняшнем дне и понял следующее:

- Завтра не сентябрь;
- Через неделю будет сентябрь;
- Послезавтра не среда.

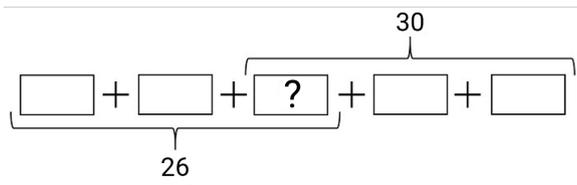
В какой из указанных дней все эти три утверждения верны одновременно? Выберите все верные варианты:

- понедельник, 30 августа;
- вторник, 31 августа;
- среда, 25 августа.

Ответ: нет; нет; да.

Решение. Заметим, что первый вариант не подходит, так как послезавтра (через два дня после понедельника) будет среда. Второй вариант не подходит так как завтра (на следующий день после 31 августа) будет сентябрь. Третий вариант подходит под все условия (через два дня после среды будет пятница, на следующий день после 25 августа будет 26 августа, и через неделю после 25 августа наступит сентябрь).

2.1. Числа 7, 8, 9, 10, 11 расставлены в ряд в некотором порядке. Оказалось, что сумма первых трёх из них равна 26, а сумма последних трёх равна 30. Определите число, стоящее посередине.



Ответ: 11

Решение. Если сложить суммы первых трёх и сумму последних трёх, то мы получим сумму всех четырёх чисел по одному разу и среднего два раза. Так как сумма всех пяти чисел равна $7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45$, а сумма 26 и 30 равна 56, то посчитанное дважды число это 11.

3.1. Каждый день сладкоежка покупает на одну конфету больше, чем в предыдущий. За одну неделю в понедельник, вторник и среду в сумме он купил 504 конфеты. Сколько конфет он купил за четверг, пятницу и субботу в сумме на той же неделе?

Ответ: 513

Решение. В четверг куплено на 3 конфеты больше, чем в понедельник, в пятницу — на 3 больше, чем во вторник, в субботу — на 3 больше, чем в среду. Итого, за четверг, пятницу и субботу куплено на 9 конфет больше, чем за понедельник, вторник и среду, т.е. $504 + 9 = 513$ конфет.

4.1. В квадрате 11×11 закрасили чёрным цветом центральную клетку. Максим нашёл клетчатый прямоугольник наибольшей площади, который целиком располагается внутри квадрата и не содержит чёрную клетку. Сколько в нём клеток?

Ответ: 55

Решение. Если обе стороны прямоугольника не меньше 6, то он обязательно должен содержать центральную клетку, так как расстояние от покрашенной клетки до сторон равно 5 клеткам. Если же одна из его сторон не больше 5, то другая точно не больше 11 и поэтому его площадь не больше 55.

5.1. Алина добирается в школу на автобусе. Автобус ходит по расписанию каждые 15 минут. На дорогу до остановки девочка тратит всегда одинаковое число минут. Если она выйдет из дома в 8:20, то будет в школе в 8:57, а если выйдет из дома в 8:21, то опоздает в школу. Уроки начинаются в 9:00. На сколько минут Алина опоздает в школу, если выйдет из дома в 8:23?

Ответ: 12

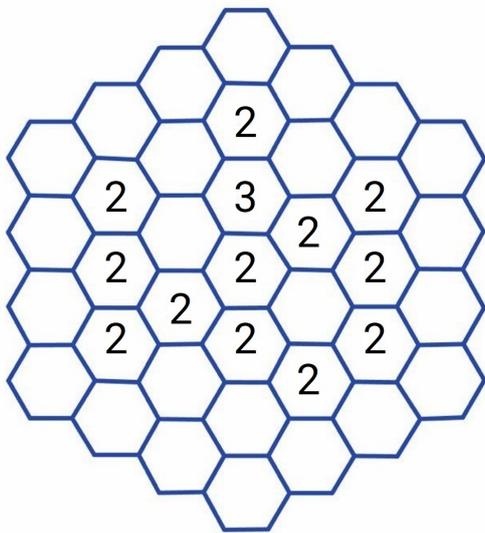
Решение. Раз Алина опаздывает в школу, выйдя из дома на минуту позже 8:20, то выйдя через 1, 2, ... 15 минут после 8:20, она попадет на следующий автобус, значит, она окажется в школе на 15 минут позже 8:57, т.е. придет в школу в 9:12.

6.1. Марк загадал трёхзначное число, большее 500, и сказал, что если все нечётные цифры этого числа заменить на А, а чётные — на Б, то получится АББ. Если же все цифры, делящиеся на три, заменить на В, а не делящиеся на три — на Г, то получится ВВГ. Укажите все трёхзначные числа, отвечающие этим условиям.

Ответ: 902, 904, 908, 962, 964, 968 (Все ответы)

Решение. Первая цифра должна делиться на 3, быть нечётной и не меньше 5. Подходит только цифра 9. Вторая цифра должна быть чётной и делиться на 3. Подходят цифры 0 и 6. Последняя цифра чётная и не делится на 3. Подходят цифры 2, 4 и 8. Итого все подходящие числа: 902, 904, 908, 962, 964, 968.

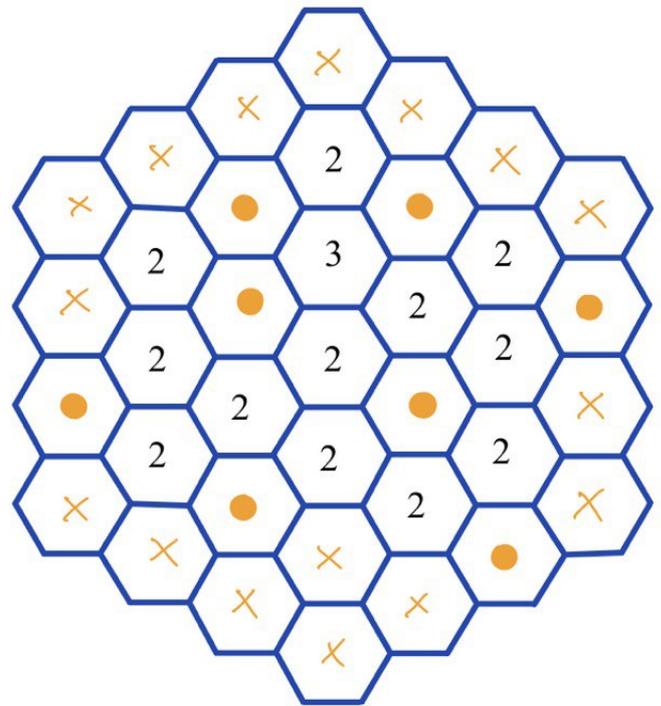
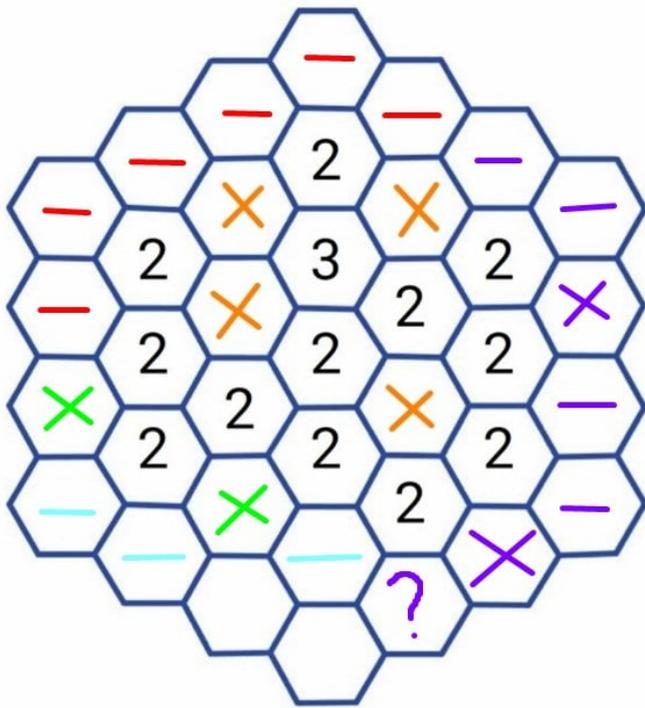
7.1. У каждой из 37 шестиугольных ячеек есть 3, 4 или 6 соседей. В некоторые из ячеек поставили фишки. После этого в каждую свободную ячейку, соседствующую не менее чем с двумя ячейками, которые содержат фишки, записали число этих соседних фишек. Затем фишки убрали, и на рисунке остались только числа. Сколько было фишек?



Ответ: 8

Решение. Посмотрим на картинку слева. Рассмотрим тройку и центральную двойку. Поймем, что фишки точно стоят на местах желтых крестиков. Далее понимаем про красные минусы — отсутствие фишек. Далее ставим фишки на местах зеленых крестиков. И синие минусы — отсутствие фишек. Фиолетовый знаком вопроса — может ли стоять тут фишка? Понимаем, что нет, так как иначе на месте соседнего голубого минуса должна быть цифра 2, но ее нет. Поэтому фишки ставим на местах фиолетовых крестиков (также учитывая, что никакие пустые ячейки не должны соседствовать с двумя фишками, иначе в них были бы проставлены цифры).

В итоге фишки расставлены как на картинке справа.



8.1. В прямоугольнике 5×18 расставили числа от 1 до 90. Получилось пять строк и восемнадцать столбцов. В каждом столбце выбрали среднее по величине число, а из средних чисел выбрали наибольшее. Какое наименьшее значение может принимать это наибольшее число?

Напомним, что среди 99 чисел средним по величине называется такое, которое больше 49 других и меньше 49 других.

Ответ: 54

Решение. Наибольшее из средних чисел N не меньше каждого из выбранных восемнадцати средних. Каждое из восемнадцати средних, в свою очередь, не меньше трёх чисел из своего столбца (включая себя). Итого, N не меньше каких-то 54 чисел таблицы. Значит, N хотя бы 54.

Чтобы построить пример когда N равно 54, достаточно заполнить таблицу числами по строкам: сначала первую строку числами от 1 до 18, вторую числами от 19 до 36, и третью числами от 37 до 54, остальные расставить произвольным образом. Заметим, что средними числами в строках будут числа от 37 до 54 (каждое из них больше любого из чисел от 1 до 36 и меньше любого из чисел от 55 до 90). Число 54 наибольшее из них.